

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Математичне моделювання систем і процесів

(частина IV)

Аналітичні методи в теорії нелінійних систем

Конспект лекцій

для студентів спеціальності 8.05080102

«фізична та біомедична електроніка»

Київ 2015

Навчальне видання

Математичне моделювання систем і процесів
(частина IV)

Аналітичні методи і теорії нелінійних систем

Конспект лекцій
для студентів спеціальності 8.05080102
«фізична та біомедична електроніка»

Укладач *Лошицький Павло Павлович, проф.*

Відповідальний редактор *В.І. Тимофєєв, проф.*

Рецензент *В.Б. Швайченко, доц.*

Передмова

В курсі лекцій «Математичне моделювання систем і процесів» розглядається розділ «Аналітичні методи в теорії нелінійних систем», що є основною частиною для розкриття змісту цього курсу. Всі лекції складаються з наступних частин: теоретичні відомості та приклади розв'язку.

Метою даного курсу є вивчення, повторення та закріплення теоретичних знань, вивчення методів розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь, отримання навиків роботи з математичними моделями.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ	19
1.1 Модель як структура для зберігання знань	21
1.2 Зовнішня пам'ять моделей	26
1.3 Цілеспрямована побудова моделей	27
1.4 Представлення моделей.....	31
1.5 Адекватність моделі оригіналу.....	33
2 ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ. ОСНОВНІ ВИМОГИ.....	37
2.1 Поняття математичної моделі.....	37
2.2 Загальна схема застосування математики	39
2.3 Множинність і єдність моделей.....	41
2.4 Вимога адекватності	43
2.5 Вимога достатньої простоти	46
2.6 Деякі інші вимоги.....	47
3 ТИПИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ.....	50
3.1 Структурні та функціональні моделі	50
3.2 Дискретні та неперервні моделі.....	50
3.3 Лінійні та нелінійні моделі.....	51
3.4 Лінеаризація.....	53
3.5 Детерміновані та імовірнісні моделі. Інші типи моделей.....	53
4 ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ	56
4.1 Про змістовну модель	56
4.2 Формулювання математичної задачі. Задачі аналізу та синтезу ..	57
4.3 Визначальні співвідношення	59
4.4 Підбір емпіричної формули	62
4.5 Про розмірність величин	63
4.6 Подібність об'єктів	64
5 ЛІНІЙНІСТЬ І НЕЛІНІЙНІСТЬ СИСТЕМ.....	68

5.1 Математичний маятник	68
6 АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ	75
6.1 Вступ.....	75
6.2 Метод збурень	78
6.3 Секулярні члени	93
6.5 Реверсивний метод.....	103
6.6 Метод варіації параметрів.....	107
6.5 Застосування декількох методів	116
6.6 Методи, які ґрунтуються на оцінці середньої нев'язки	141
6.7 Принцип гармонічного балансу.....	172
7 ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ	181
7.1 Вступ.....	181
7.1 Принцип гармонічного балансу для коливальних систем.....	182
7.3 Ітерації.....	211

ВСТУП

Як приклад математичного моделювання розглянемо побудову моделей в процесі проектування самонавідної ракети для стрільби по рухомій цілі. Як і для будь-якої складної системи, необхідно побудувати її математичну модель, що в кінцевому результаті зводиться до складання ряду диференціальних рівнянь, що описують залежність характеристик процесу від його параметрів. При вивченні системи шляхом дослідження її математичної моделі неминуче доводиться приймати ті чи інші допущення, так як прагнення до точного врахування всіх властивостей реальної системи може призвести до такого ускладнення, при якому аналіз виявиться неможливим. З іншого боку, надмірне спрощення математичної моделі є неприпустимим, оскільки результати досліджень в цьому випадку можуть не відображати найбільш характерні властивості системи. Вирішення цієї суперечності є зазвичай важким завданням, успіх вирішення якої залежить від досвіду і мистецтва дослідника.

Самонаведенням називається такий метод управління, при якому керуючі сигнали, що забезпечують наведення ракети на ціль, виробляються на самій ракеті за рахунок відображення або випромінювання цілю якого-небудь виду енергії. Пристрої, за допомогою яких на ракеті виробляється інформація про рух цілі, називаються головками самонаведення. Головки самонаведення підрозділяються на радіолокаційні, інфрачервоні або теплові, оптичні, акустичні і т. д. Найбільш широко використовуються радіолокаційні та інфрачервоні головки самонаведення. За місцем розташування первинного джерела випромінювання енергії можна розглядати три типи головок самонаведення: активні, коли джерело опромінення цілі знаходиться

безпосередньо на ракеті; напівактивні, коли джерело випромінювання знаходиться поза ракетою; пасивні, коли джерелом випромінювання є сама ціль.

До складу головки самонаведення входить пристрій, що автоматично і безперервно вимірює координати ракети відносно цілі. Він називається координатором цілі. Найчастіше координатор вимірює кутові відхилення цілі від поздовжньої осі ракети (кути неузгодженості), а в деяких випадках – відстань до цілі, швидкість зміни швидкості і кутову швидкість повороту лінії ракета-ціль. З виходу координатора знімається сигнал помилки у вигляді напруг чи струмів, що залежать від кутів неузгодженості. Напрямок на ціль (рис.1) можна визначити або кутом неузгодженості φ і кутом фазування Φ , або кутами неузгодженості φ_y і φ_z . Відповідно до кутів неузгодженості на виході координатора з'являються дві напруги, пропорційні кутам неузгодженості в поздовжній φ_y і поперечній φ_z площинах. Ці напруги після посилення підводяться до приводів рулів висоти і напрямку. Приводи відхиляють рулі, які створюють аеродинамічні сили і моменти для коригування напрямку польоту ракети.

У відповідності з заданими тактичними вимогами до керованої ракети і класом ракети самонаведення може здійснюватися як на всій траєкторії польоту ракети, так і на її частині. Коли потрібні великі дальності стрільби, використовуються комбіновані методи наведення, що поєднують, наприклад, автономне управління, управління у промені радіолокатора або командне управління з самонаведенням, яке застосовується на кінцевій ділянці польоту для збільшення точності наведення ракети на ціль.

Система самонаведення являє собою складний технічний комплекс, що складається з великої кількості взаємопов'язаних елементів. Ці елементи дуже різноманітні. Сюди входить власне ракета, що взаємодіє в

процесі польоту з навколишнім середовищем, елементи автоматики, силові приводи, гіроскопічні прилади, електронна апаратура, що служить для прийому інформації про рух цілі і вироблення команд наведення і т. п.

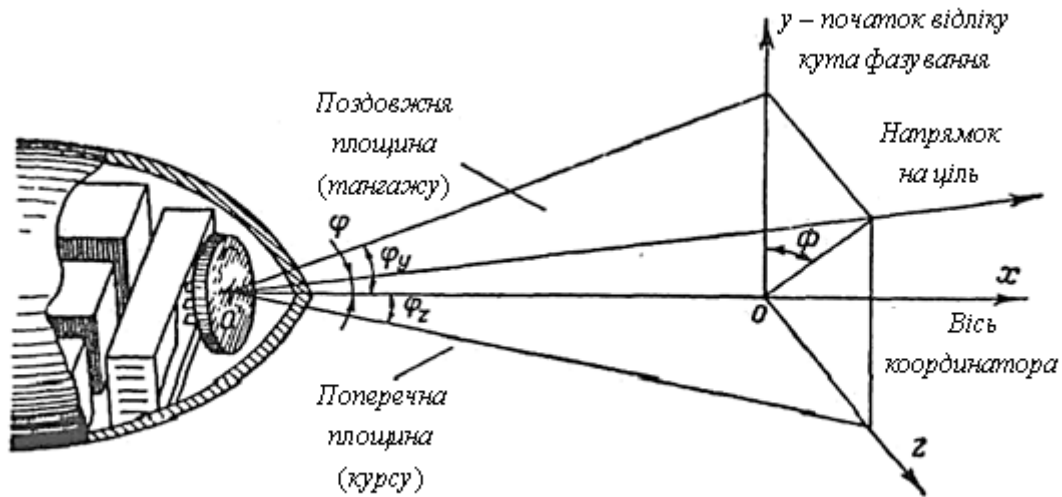


Рис. 1. Системи відліку

У процесі проектування в результаті раціональних компромісних рішень з багатьох взаємопов'язаних питань повинні бути вибрані параметри окремих ланок системи самонаведення так, щоб вся система самонаведення в цілому мала б оптимальну якість. В якості критерію оптимальності зазвичай приймається критерій максимуму ймовірності попадання промаху в задану область. Таким чином, в процесі проектування повинна бути вирішена задача оптимального синтезу системи самонаведення за вказаним вище критерієм якості.

В цілому рішення цієї задачі являє собою складну проблему, так як система самонаведення описується складною системою нелінійних диференціальних рівнянь при наявності випадкових збурень, що носять як стаціонарний, так і нестаціонарний характер. Найбільш загальним методом вирішення таких імовірнісних задач, як відомо, є метод статистичних випробувань. Однак, незважаючи на великі можливості, що відкрилися

завдяки розвитку електронних обчислювальних машин, вирішити повністю задачу синтезу системи самонаведення методом статистичних випробувань через велику кількість невідомих варійованих параметрів системи в прийнятні для практики терміни не представляється можливим. Тому рішення загальної задачі синтезу системи самонаведення в процесі проектування передбачає ряд послідовних етапів розв'язання окремих завдань, тобто завдань, при яких деякі параметри системи вважаються вже відомими.

Проектування починається з попереднього етапу, на якому визначаються технічні вимоги для розробки основних елементів системи самонаведення. На попередньому етапі проектування розглядається спрощена математична модель системи, складена на підставі експериментальних даних і досвіду, накопиченого в процесі проектування аналогічних систем. На цьому етапі велику роль відіграють наближені аналітичні методи дослідження, що дозволяють аналізувати вплив окремих параметрів системи на її поведінку в цілому, не вдаючись кожен раз до вирішення всієї сукупності диференціальних рівнянь, що визначають прийнятну математичну модель.

Найбільш повне рішення такого завдання може бути отримане в тому випадку, якщо є спільне рішення, в якому нас цікавлять зв'язки між параметрами системи і характеристиками її руху, в тому числі і промахом, виражені в аналітичній формі. Для отримання такого рішення, природно, необхідно спростити систему, зберігши при цьому її основні властивості. Отримане таким чином рішення буде наближеним і, звичайно, не придатним для дослідження динамічної точності системи самонаведення, однак воно дозволяє розкрити загальні закономірності, властиві системі самонаведення в цілому і визначити напрями більш глибоких досліджень на обчислювальних машинах.

Рішення загальної задачі синтезу системи самонаведення при такому підході розпадається на два послідовних етапи. На першому етапі, на підставі отриманого наближеного рішення вибирається структура методу самонаведення і основні аеродинамічні та балістичні характеристики ракети, що задовольняють пред'явленим до системи самонаведення тактичним вимогам.

Існує кілька методів наведення ракет на ціль, кожному з яких властива своя, характерна для нього траєкторія польоту ракети. Будь-яка траєкторія польоту з допустимими похибками може бути записана математично. Оскільки точні математичні вирази, що характеризують траєкторію польоту ракети, є складними і залежать від багатьох факторів, часто для характеристики методу наведення користуються спрощеними рівняннями.

Основні методи наведення ракет на рухому ціль наступні:

1. Метод прямого наведення.
2. Наведення по кривій погоні.
3. Наведення з постійним кутом випередження.
4. Метод наведення з послідовним (безперервним) випередженням.

1. Метод прямого наведення.

Для самонавідних ракет найбільш простим є метод прямого наведення. Сутність його полягає в тому, що в процесі наведення поздовжня вісь ракети безперервно спрямована на ціль. У цьому випадку координатор цілі встановлюється на ракеті нерухомо, осі ракети і координатора збігаються. Якщо вісь ракети спрямована на ціль, кут неузгодженості дорівнює нулю.

Оскільки ціль рухається, то ракета повинна повертатися за цілю, і її траєкторія викривлюється. Для зміни напрямку польоту ракети до неї повинна бути додана керуюча сила \vec{Y} (рис.2).

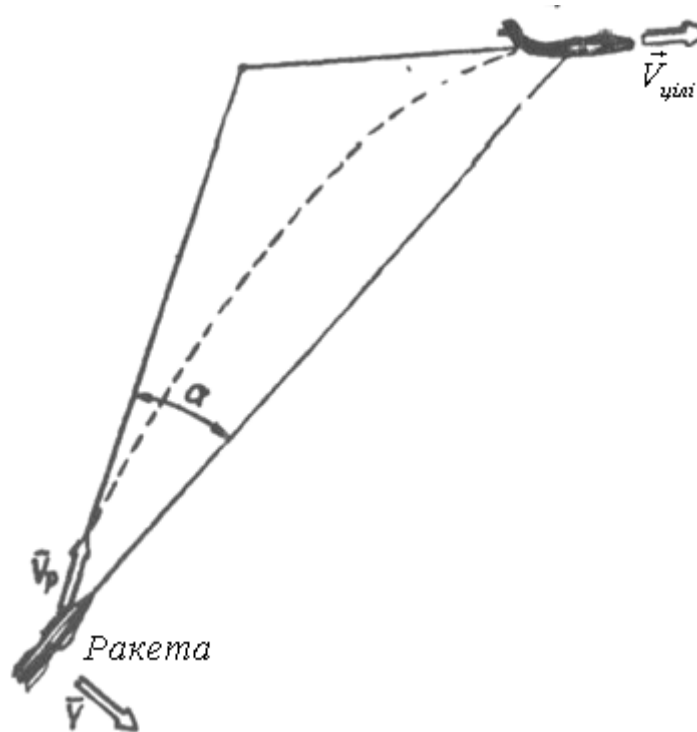


Рис. 2. До методу прямого наведення

З малюнка видно, що вектор швидкості не збігається з напрямком ракета-ціль. При зміні напрямку руху цілі вектор швидкості у всіх випадках буде відставати від напрямку ракета-ціль на кут α . Ракета весь час спрямована в деяку точку позаду цілі. Крім того, рух ракети відбувається по сильно викривленій траєкторії.

Метод прямого наведення може бути успішно застосований лише для наведення ракет на нерухому ціль або ціль, швидкість якої в багато разів менше швидкості ракети.

2. Метод наведення по кривій погоні.

Метод наведення по кривій погоні також є найпростішим методом наведення. Характерним для цього методу є те, що вектор швидкості

ракети в кожен момент часу точно співпадає з напрямом на ціль. Метод заснований на підтримці рівності нулю кута випередження Ψ (кут між вектором швидкості ракети і напрямом ракета-ціль, рис. 3).

Для того, щоб ракета летіла весь час у напрямку цілі, потрібно, щоб вісь координатора була поєднана з вектором швидкості. Цього можна досягти, якщо координатор на ракеті розгортати весь час по повітряному потоку, тобто поєднувати з напрямком швидкості.

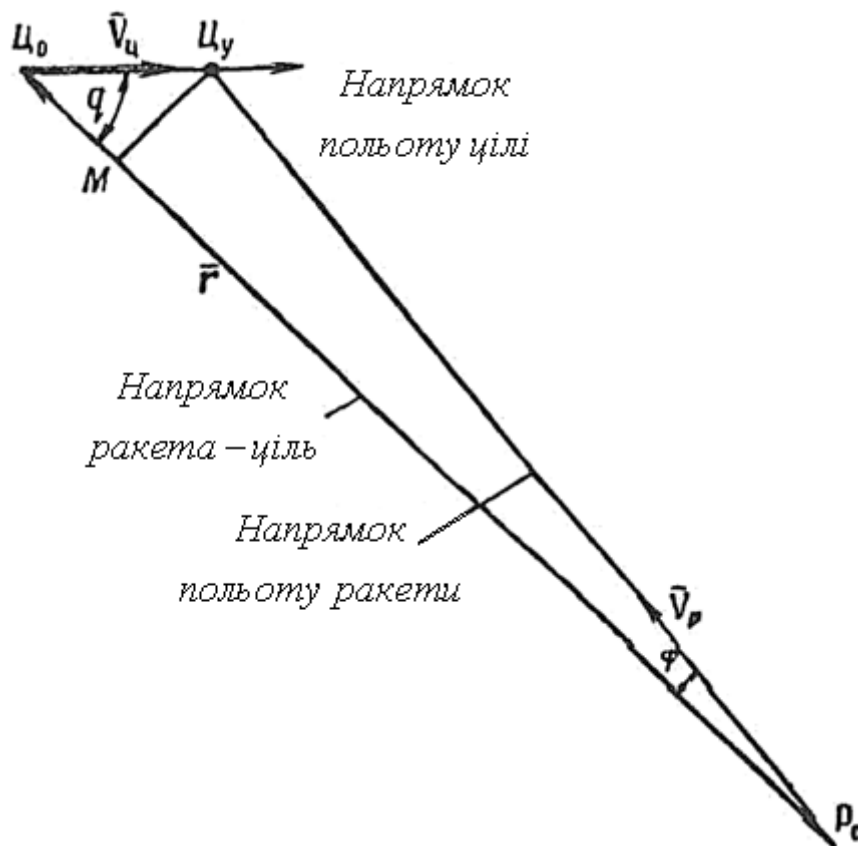


Рис. 3. Кут випередження

Ракета наведена за методом погоні на повітряну ціль, незалежно від свого положення щодо цілі в момент пуску, завжди прагне вийти на один і той же напрямок – строго в хвіст цілі. Траєкторія польоту ракети при цьому викривлена і має найбільшу кривизну в районі цілі. Чим більше викривлена траєкторія, по якій летить ракета, тим більша керуюча сила

буде потрібна для її повороту. Так як величина керуючої сили обмежена і не може бути досить великою, то промах ракети буде більшим. У цьому методі слід мати на увазі два можливі випадки: переслідування цілі, що віддаляється (на попутних курсах, рис.4, а) і переслідування цілі, що наближається (на зустрічно-пересічних курсах, рис.4, б).

Як видно з рисунка, траєкторія ракети сильно викривлена, особливо при зустрічно-пересічних курсах. У першому випадку (рис.4, а), якщо ракета має достатню дальність польоту і швидкість більшу, ніж швидкість цілі, вона може вразити ціль. У другому випадку (рис.4, б) в міру наближення ракети до цілі різко зростає швидкість повороту ракети.

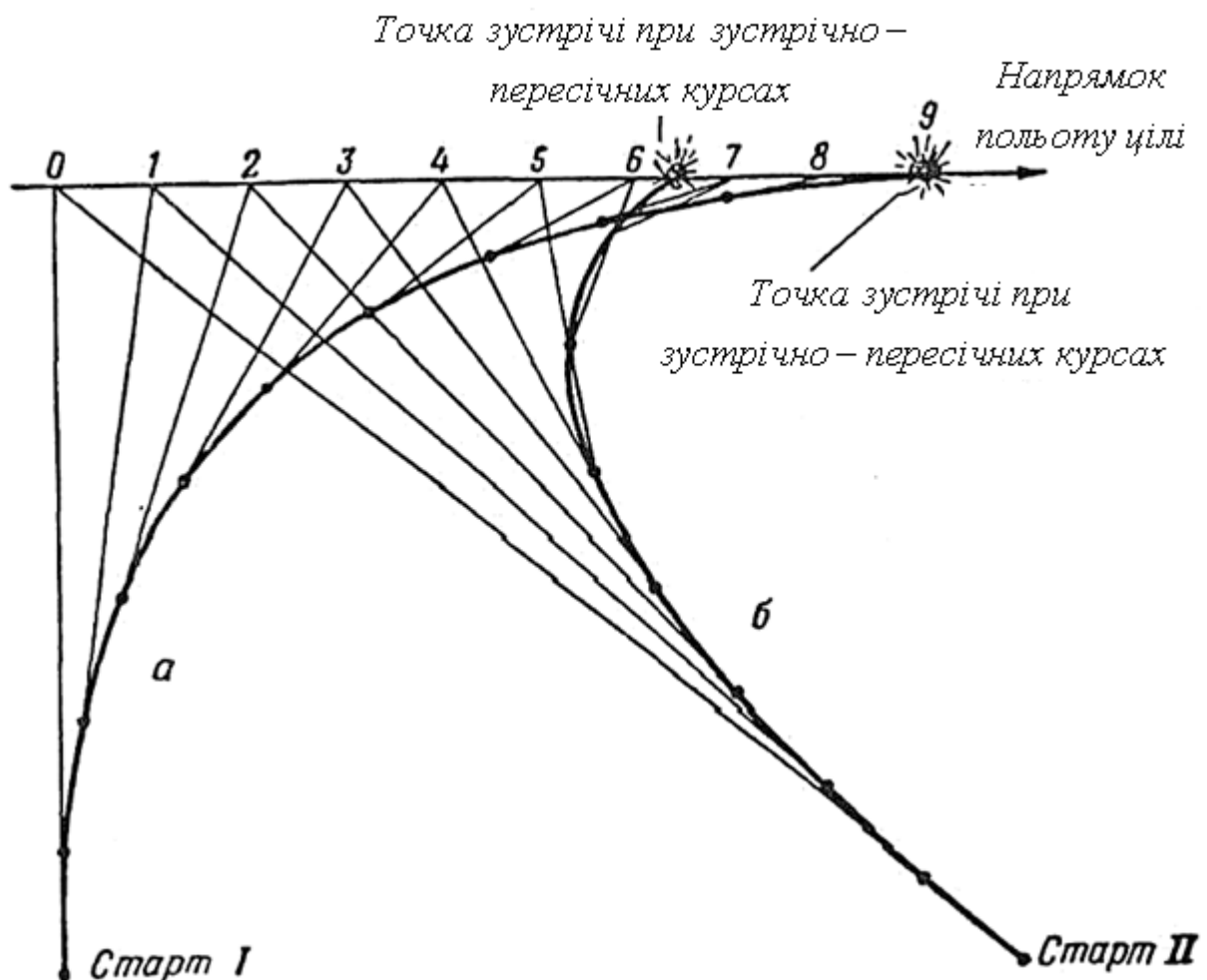


Рис. 4. Криві погоні

Так, при швидкості ракети в два рази більшій, ніж швидкість навіть неманевруючої цілі, для здійснення такого різкого повороту потрібна керуюча сила в 40-60 разів більша, ніж вага ракети. Таке навантаження корпус ракети витримати не в змозі. Але насправді керуюча сила, створювана рулями ракети, зазвичай значно менша через малу площу рулів. Тому наведення ракети припиниться, оскільки вона не встигатиме повертатися за ціллю. Метод наведення по кривій погоні практично не застосовується для перехоплення повітряних цілей. Він може бути використаний в основному для управління самонавідними бомбами та торпедами.

3. Метод наведення з постійним кутом випередження.

Більш досконалим методом наведення, що значно підвищує ймовірність ураження цілі, вважають метод наведення з постійним кутом випередження. Це такий метод, при якому кут випередження Ψ протягом усього польоту підтримується постійним і встановлюється на початку наведення. Ракета в цьому випадку рухається на перехоплення цілі в точку зустрічі з деяким постійним кутом випередження, що залежить від швидкості та напрямку руху цілі в момент пуску ракети. У цьому випадку використовують апаратуру наведення методом погоні, але перед пуском ракети вісь координатора розгортають на заздалегідь розрахований кут випередження в сторону руху цілі. З рис. 5 випливає, що в процесі наведення лінія ракета-ціль буде переміщатися паралельно своєму початковому стану. При випадковому відхиленні ракети від лінії початкового напрямку, вісь координатора також відхилиться від лінії ракета-ціль, з'явиться кут неузгодженості. У цьому випадку виникає керуюча напруга, що відхилить рулі ракети в потрібну сторону. Оскільки траєкторія ракети має невелику кривизну, то помилки наведення невеликі. Ракета не відчуває великих навантажень, тому вона може бути зроблена

менш міцною, тобто легшою. Метод наведення з постійним кутом випередження не може бути використаний проти високоманеврених цілей, що різко змінюють швидкість і напрямок польоту. Так, якщо за час польоту ракети ціль повернеться більш ніж на 90° , то кут випередження стане негативним і ціль не буде вражена.

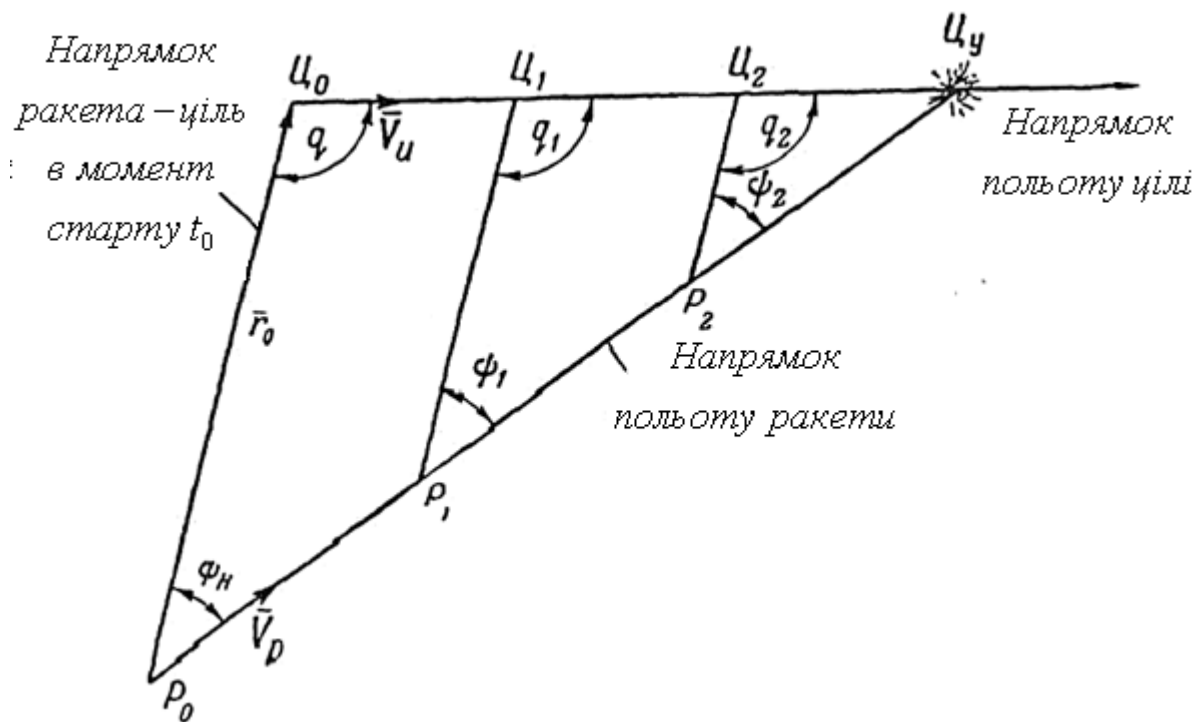


Рис. 5. До методу наведення з постійним кутом попередження

4. Метод наведення з послідовним (безперервним) випередженням.

Це метод, в якому в будь-який момент часу вектор швидкості ракети направлений у випереджену точку зустрічі, відповідну даному моменту часу. Цей метод передбачає, що кут випередження в процесі польоту ракети буде автоматично змінюватися залежно від маневру цілі. Для того щоб ракета наводилася в випереджену точку зустрічі з ціллю при будь-яких маневрах останньої, необхідно змінювати кут випередження ψ . Для цього на ракеті необхідно встановити рахунково-розрахунковий прилад. У процесі наведення лінія ракета-ціль переміщається паралельно своєму

початковому стану, не змінюючи напрямку у просторі (не обертається). Зважаючи на це, такий метод ще називають методом паралельного зближення (рис.6). У системах самонаведення такий метод забезпечується установкою координатора на рухомій платформі (стабілізованою в просторі за допомогою вільного гіроскопа), напрямом осі якого збігається з напрямом осі координатора. До пуску ракети вісь координатора направляється на ціль, складаючи з віссю ракети кут, рівний розрахунковому кутку попередження. Перед сходом ракети з пускової установки гіроскоп розорієнтовується. Вісь координатора, зберігаючи незмінне положення в просторі, буде переміщатися паралельно самій собі, утворюючи з напрямком швидкості деякий постійний кут випередження. Якщо ціль змінить швидкість і напрямок руху, то сигнал з координатора, пропорційний куту неузгодженості, надійде в рахунково-розрахунковий пристрій, який вирахує новий кут випередження, що відповідає даній швидкості і напрямку. Одночасно коригується і положення стабілізованого гіроскопом майданчика з встановленим на ньому координатором. Із рахунково-розрахункового пристрою на рулі ракети подається сигнал, пропорційний куту неузгодженості, і ракета повертається так, що наводиться в миттєву точку зустрічі. Кут Ψ в цей момент задовольняє заданому закону наведення. Таким чином, при маневрах цілі ракета теж маневрує, але крутизна її траєкторії і перевантаження зазвичай не перевищують крутизну і перевантаження цілі. Це дозволяє мати невеликі несучі поверхні ракети, зберігаючи високу точність наведення на ціль.

Конструктивне оформлення координатора, що стежить, звичайно, більш складне, ніж нерухомого.

На другому етапі при відомих структурі методу самонаведення і параметрах ракети досліджується динамічна точність системи самонаведення і вибираються оптимальні параметри системи управління.

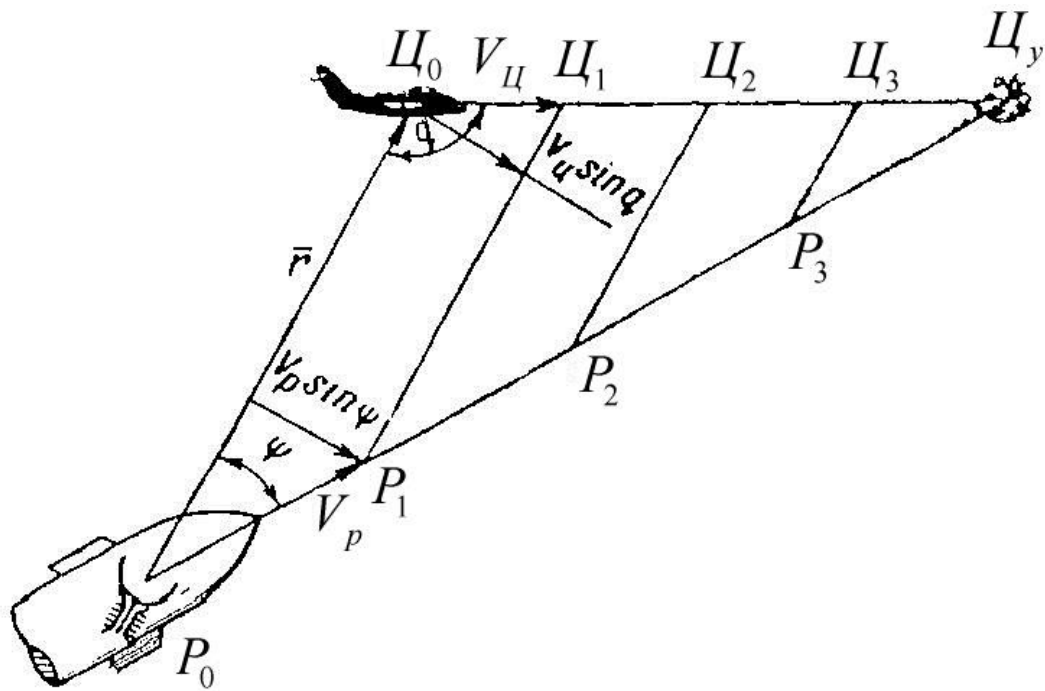


Рис. 6. До методу наведення з послідовним (безперервним) випередженням

Вирішення цього завдання проводиться методом статистичних випробувань на обчислювальних машинах при можливо більш повному врахуванні реальних характеристик системи і діючих на неї збурень. Основною складністю при вирішенні цього завдання, незважаючи на значне скорочення числа невідомих варійованих параметрів системи, залишається все ж великий необхідний для її вирішення машинний час. Тому в процесі проектування використовуються різні наближені методи, що дозволяють скоротити машинний час, необхідний для вирішення задачі синтезу методом статистичних випробувань. Зазвичай ця мета досягається за рахунок використання деяких узагальнених параметрів, аналітично пов'язаних з коефіцієнтами передавальної функції бортового контуру управління і визначають основні динамічні характеристики системи самонаведення в цілому. Застосування узагальнених параметрів дозволяє поширити основні результати наближених аналітичних методів на динаміку реальної системи і, що найголовніше, розкрити основні якісні

залежності впливу різних чинників на характер процесу самонаведення і на точність наведення ракети на ціль.

1 ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ

Побудова моделей і оптимізація – головні напрямки міждисциплінарних робіт, що дають можливість надійно описати системи і процеси. Вони є передумовами для цілеспрямованого використання їх властивостей в інтересах суспільства.

1. Побудова моделей як одна із сторін діалектичної пари протилежностей аналіз-синтез має багато аспектів, з яких той чи інший (в залежності від поставлених цілей) висувається на перший план.

Кожна модель зберігає знання в належній формі, при цьому запам'ятовування знань, як правило, пов'язане зі зменшенням надлишковості.

Модель в своїй функції як структури для зберігання знань є з'єднувальною ланкою між теоретичним і емпіричним пізнанням. Фразу «немає нічого простішого за хорошу теорію» слід сприймати дослівно. Формалізована теорія дозволяє описати більше число окремих фактів за допомогою невеликого числа основних результатів. Отже, головне призначення теорії полягає в зменшенні надлишковості, обумовленої великою кількістю окремих фактів, і пов'язаним з цим більш глибоким пізнанням закономірних зв'язків.

Системна концепція фіксує загальні рамки моделі, інакше кажучи, визначає структуру пам'яті моделі. Конкретна форма моделі, в якій вона може діяти в якості заміни тільки одного конкретного об'єкта, отримується завдяки тому, що експериментальні, тобто емпіричні, дані приводяться у відповідність з цими рамками, тобто для параметрів моделі крок за кроком встановлюються все більш достовірні значення. В цьому сенсі кожна

розроблена модель виражає компроміс між теорією і практикою, між теоретичними пізнаннями і емпіричними даними.

2. Інший важливий аспект побудови моделей полягає в тому, що модель повинна бути в приблизному сенсі заміною реального стану речей, реальної системи. Таким чином, мова іде не тільки про запам'ятовування інформації, що зменшує надлишковість, але і про такі величини, що відповідають реальному об'єкту і характеризують його, які повинні узгоджуватися в моделі, наприклад, у вигляді вхідних і вихідних величин та станів, і про такий опис відношень між узгодженими величинами в вигляді формул, при яких поведінка моделі виявляється порівнянною з поведінкою реального об'єкта. Так представляється роль моделі як заміни об'єкта, принаймні при модулюванні реальних типів поведінки. При постановці інших цілей моделювання роль моделі, що полягає в тому, щоб бути в деякій мірі адекватною вихідному об'єкту, повинна розумітися аналогічно.

3. Оптимізація описує аспект управління. Оскільки мова йде про те, щоб «не пояснити світ, але змінити його», то напевно чи можна теоретико-пізнавальну сторону моделювання відділити від функції управління, що властива моделі, тому в дусі компромісу на практиці іноді доводиться відмовлятися від можливого вигравання в знаннях на користь більшої цілеспрямованості моделі. Модель, що побудована на основі системного аналізу, повинна бути суттєвим допоміжним засобом для пошуку рішень.

При практичних застосуваннях, як правило, існують обмеження у коштах, які можна витратити на моделювання і оптимізацію, таким чином, автоматично стикаємося з вимогою побудови моделей при мінімальних витратах.

Для теорії характерно, що її положення отримуються в результаті узагальнення окремих факторів, а достовірність перевіряється шляхом

застосування теорії у випадках, які хоча і охоплюються теорією, але не належать області джерел її початкових положень. Факти, які по області своєї значущості не пов'язані з цими джерелами, є чисто емпіричними і не можуть розглядатися як такі, що відносяться до теорії.

Розвиток кібернетики саме в останні роки, що дав, зокрема, системний підхід до так званих великих систем, який найсильніше проявився в різноманітних спробах глобального моделювання, привів до суттєво більш широкого розуміння моделювання.

При цьому справа дійшла до переосмислення джерел модельних конструкцій, які власне існували ще задовго до періоду стрімкого розвитку науки і техніки. Виявилось, що с давніх пір найбільш значущими науками, що займаються побудовою моделей, була фізика, зокрема механіка. Вже з традиційних підходів до описання поведінки фізичних об'єктів можна отримати суттєві уявлення про побудову моделей. Звісно, методологія такої побудови розвинулася далеко за межі відомого і звичайного для фізики.

1.1 Модель як структура для зберігання знань

Теза 1. Модель є результатом процесу пізнання, який зафіксований у мозку чи поза ним на відповідному фізичному носії.

Так як будь-який результат процесу пізнання завжди має тільки відносний попередній характер, це справедливо також і для кожної моделі. Таким чином, модель дає відносне уявлення про даний об'єкт, що постійно уточнюється.

Один із аспектів моделювання – відносна умовність рівня пізнання, досягнутого творцем моделі, колективом, людським суспільством; інший аспект – обов’язкова здатність моделей до розширення. Повинна існувати можливість поступово вводити все нові знання в уже побудовану модель; якщо при цьому поставлені рамки для моделі стають надто тісними, необхідно розширити обраний основний клас моделей.

Спочатку наведемо декілька положень відносно внутрішніх процесів запам’ятовування в мозку, щоб вивести звідси деякі висновки про характер пам’яті моделі.

Кожен з нас зберігає в своїй пам’яті безліч значних і незначних фактів. Іноді достатньо невеликого поштовху (ключової інформації), щоб воскресити подію з минулого.

Як виходить, що ми можемо згадати так ясно і вірно щось зорове про хід подій? Навряд чи можна припустити, що всі подробиці раніше пережитих подій назавжди зафіксовані в нашому мозку. Скоріше, напрошується гіпотеза, що інформація, яка зберігається в мозку, характеризується двома структурними ознаками.

В пам’ять вводиться деяка опорна інформація, тобто достатньо репрезентативні відомості, які шляхом зменшення надлишковості отримуються з початкових даних. Опорна інформація не є неупорядкованою, а систематизована основними відношеннями, які наближено відповідають залежностям в реальному світі.

Структура моделі може бути представлена графом, у вершинах якого компоненти опорної інформації, а ребра – основні відношення. Інформація, що зберігається, імовірно, впорядкована у вигляді ієрархічної структури з багатьма рівнями, що пов’язані між собою. При цьому ключова інформація на одному рівні активує цілу ділянку пам’яті на сусідньому нижньому рівні. Завдяки такому представленню можна було б пояснити

той факт, що активізована частина інформації може активізувати інші її елементи в сенсі асоціативної пам'яті.

Суттєвою особливістю побудови моделей є те, що власною метою побудови моделі не може бути одне лише зберігання стисненої (редукованої) інформації. Скоріше, важлива можливість приводити в дію побудовану модель і використовувати її в якості заміниці покладеного в її основу реального об'єкта. При цьому по мірі використання нових даних вона може безперервно вдосконалюватися в сенсі її корисності.

Що відбувається в процесі згадування, при зверненні до інформації, що зберігається в моделі? Для цього в розпорядженні мозку є тільки стиснена інформація, деякий каркас. При відтворенні раніше пережитої події ми змушені інтерполювати, тобто додатково привносити індиферентні деталі з нашого багатого внутрішнього світу образів і досвіду до тих пір, поки з схематичних обрисів, що уривками приходять нам в голову, не складеться знову щось цілісне, що розцінюється нами як відображення минулих подій. Таким чином, необхідно обов'язково мати на увазі, що кожний активний стан нашої пам'яті завжди до відомої степені є новим творінням, яке може бути схожим на образ тільки деякими суттєвими рисами. В наші конкретні спогади ми повинні «вдихнути» нове життя за допомогою світу всіх наших переживань.

У відповідності з цими міркуваннями можна представити собі ефективні методи зберігання і використання образів. Немає ніякої необхідності зберігати в пам'яті образи в їх початковій формі, однак цілком можна з реальних образів отримувати опорну інформацію і суттєві основні відношення між її компонентами, а реальний зміст образів отримувати, наприклад, з розвинень в ряд по цим базисним елементам. Таким чином, достатньо зберігати в пам'яті тільки ці базисні елементи і певні «коефіцієнти представлення». Ця редукція, якщо не переслідуються

ніякі спеціальні цілі, мабуть, допускає подальше спрощення, але так, щоб з ерзац-інформації з допустимим ступенем неточності можна було б реконструювати початковий образ.

Суттєва властивість нашого внутрішнього устрою пам'яті – його здатність до розширення. Ми цілком здатні доповнювати запас моделей, наявний в нашому мозку, в певному порядку іншими моделями. Це суттєва функція навчання.

Власне перед кожним вчителем стоїть задача створити у учнів окремі моделі. Цю задачу він вирішує тим, що, орієнтуючись на середній рівень моделей, він пояснює поняття і тим самим утворює опорну інформацію, зіставляє ці поняття одне з одним, а також з вже відомими поняттями і так отримує нові основні відношення.

Як правило, за короткий час необхідно засвоїти величезний матеріал. Чи залишається тут час, щоб хоч трохи із засвоєного застосувати і випробувати? Однак моделі не повинні бути мертвими знаннями. Володар моделей володіє ними тільки в тій мірі, в якій він час від часу заповнює їх власним творчим життям. Тільки так він може правильно пристосовувати нові моделі до свого власного світу моделей. Так, навіть найкращий вчитель через необхідність може намітити лише загальні рамки матеріалу, що підлягає засвоєнню, і навіть вони не будуть сприйняті учнями однаково.

При справжньому навчанні, тобто при справжньому розширенні власного світу моделей, складається єдність пізнання і дії, інакше велика кількість моделей перебувала б в мозку в безладі, подібно залишкам від аварії корабля, що розкидані абияк.

Хотілося б, щоб сприйняття моделей від вчителя чи з книг завжди було пов'язано з власними переживаннями, з експериментом, грою, улюбленою справою. На жаль, в даний час усезростаюча частина

відомостей про сучасні досягнення науки приймаються на віру, а іноді черпається з книг без правильного власного уявлення.

Щоб творча розробка займала більше місця, необхідні свідомі вправи, які потребують від учня справжньої активності, щоб він пов'язував нове з відомим, був у змозі сам вирішувати маленькі проблеми. Кожне переживання успіху при роботі з новими моделями визиває радість, дає більш глибоке розуміння і, можливо, пробуджує творчу фантазію тоді, а може бути, навіть перш за все тоді, коли рішення задачі дається не з першої спроби.

Проблематика здатності пам'яті моделі до розширення тісно пов'язана з питаннями розумної організації банків даних. Банк даних є упорядкована множина записаних в пам'яті фактів, які можна записувати з різними цільовими установками; у відповідності з умовами питань банк видає відповіді – в найпростішому випадку тільки ті, які можна безпосередньо вивести з інформації, що зберігається. В більш складних випадках відповіді генеруються за допомогою граматичних залежностей, жорстко пов'язаних з банком даних по своїй організаційній структурі.

Такі банки даних дуже важливі, наприклад, в системі охорони здоров'я у формі лікарняних ліжок, даних про хвороби для систем діагностики. Тут суттєві два важливих зауваження якісного характеру:

1. При запам'ятовуванні даних рекомендується застосовувати редукцію даних, узгоджуючись з властивостями конкретного банку даних, щоб уникнути швидкого заповнення області пам'яті, що мається в розпорядженні.

2. Організацію банку даних слід вибирати так, щоб вона давала принципову можливість їх розширення також і по відношенню до багатства зв'язків. Сьогодні багато банків по їх організаційній структурі

допускають лише збільшення стосовно об'єму, але не стосовно багатства внутрішніх зв'язків.

Теза 2. Наші думки, відчуття і вчинки визначаються світом внутрішніх моделей, що зберігається в мозку. Цей світ можна характеризувати наступними якісними ознаками:

- опорна інформація (поняття);
- основні відношення (семантична мережа понять);
- ієрархічна структура (асоціативна пам'ять);
- здатність до розширення (агрегування і розширення структури).

1.2 Зовнішня пам'ять моделей

Сформульовані у тезі 2 якісні вимоги до структури, що зберігає знання, необхідно висунути і до зовнішньої пам'яті моделі і до того ж тим суворіше, чим вище повинна бути її якість.

Ми організуємо зовнішню пам'ять з використанням різноманітних засобів, щоб допомогти розширенню творчих можливостей людини, а також передати технічним системам певні розумові операції, що формалізуються і виконуються людиною.

Загальні питання так званого штучного інтелекту, дослідження роботів тісно пов'язані з раціональним формуванням зовнішньої пам'яті моделей, з осмисленою організацією банків даних, з технікою таблиць рішень і т. д.

Коли мова йде про зовнішню пам'ять, то мають на увазі перш за все техніку, де такі технічні установки, як дистиляційні колонки, теплообмінники, хімічні реактори і механічні конструкції з успіхом описують так званими моделями поведінки, щоб отримати більш сприятливі передумови для управління цими установками.

Проблематика зовнішньої пам'яті моделей грає роль також і далеко за межами чистої техніки.

В будь-якому випадку в зовнішній пам'яті за допомогою необхідної формалізації, а саме із застосуванням засобів вираження певної спеціальної мови, записується синтаксична інформація.

Всі породження людського духу, записані в формі, що активується, на належному носії, повинні витлумачуватися як зовнішня пам'ять моделей; отже, немає необхідності зводити моделювання тільки до імітації типів поведінки, тобто відношень між певними стимулами і відповідними реакціями конкретної системи.

Головна функція зовнішньої пам'яті, мабуть, повинна полягати в тому, щоб в стисненій формі з застосуванням відповідних допоміжних засобів зберігати одного разу побачене, відчуте, впізнане. При цьому повинні встановлюватися відношення до вже введені інформації чи до вже розроблених окремих моделей.

1.3 Цілеспрямована побудова моделей

Не завжди приводом для побудови моделей є прагнення до «чистого» пізнання. Найчастіше моделі будуються як засіб задоволення певних потреб; вони повинні допомагати кращому досягненню певних

цілей. Тоді в діалектичній парі пізнання-дія аспект пізнання підлягає аспекту керування.

Звичайно, цільову спрямованість побудови моделей не можна чітко відділити від аспекту накопичення знань. Однак тут ми будемо розробляти аспект цілеспрямованої побудови моделей сам по собі. Мова йде про роль моделей як інструмента досягнення певних цілей управління індивідумом, колективом, людським суспільством, цілей управління промисловістю і т. д.

Теза 3. Модель найчастіше будується з певною метою. Мета впливає на те, як встановлюється лінія розділу в діалектичній парі суттєве-несуттєве, тобто на те, які риси об'єктивного явища виявляються суттєвими для моделі. Модель, побудована з певною метою, є наче проекція явища об'єктивної реальності з певної токи зору.

Цілеспрямована побудова моделі є становленням моделі через намір її творця. Відносно цього є наступний вислів Б. Брехта:

«Не можна створювати образи, не маючи про них певних суджень і не переслідуючи певних цілей. Не знаючи, не можна показати.»

Безумовно, необхідно брати до уваги, що при цілеспрямованій побудові моделі не вона є кінцевою ціллю; навпаки, модель є тільки необхідним проміжним ступенем. Безумовний обов'язок творця моделі полягає в тому, щоб зробити отриману модель корисною для початкових потреб, отже, передати її для користування. Однак найчастіше багато творців моделей зупиняються на цьому проміжному ступені і тим обмежуються, так як задоволені отриманими знаннями; однак це не скромність, а вираження нездатності досягнути поставленої мети.

Математика необхідна, щоб отримати кількісно придатну для використання модель; однак вона також спокушає приділяти особливу увагу окремим моделям, які особливо легко піддаються математичній

обробці. Але це безумовно відводить в сторону від цілеспрямованої побудови моделей. Спеціаліст в області технічних наук абсолютно правий, коли залучає для своєї моделі математичний апарат тільки в тій мірі, в якій це необхідно для надійного досягнення його власної мети, наприклад для керування технічною установкою.

Широко поширене зловживання математикою при побудові моделей характеризував відомий вчений Холл. Він підкреслив, що математична побудова моделей перетворилась в автокаталітичний процес, внаслідок чого одні частини системи моделюються занадто точно, деякі методики занадто розвиваються, а інші частини систем з міркувань математичної зручності недопустимо спрощуються. Факторам, яким не можна надавати математичну форму, приділяється недостатньо уваги. Системи, з якими ми маємо справу, коли хочемо вирішувати помірні проблеми, поводяться просто не у відповідності з сучасними математичними уявленнями.

Холл хоче тут вказати не тільки на можливу однобічність при спробах математичного опису об'єктивної реальності, але і на те, що при побудові моделей реальних процесів є різні рівні, на яких по-різному досягається компроміс.

Отже, цілеспрямована модель завжди передає суттєве для даної цілі; вона представляє собою заміну дійсності з таким рівнем абстракції, який найкорисніший для поставленої мети.

Як правило, деталі, які не служать безпосередньо цілі, сприймаються тільки як завада, отже, від них абстрагуються. Однак це не завжди правильно. Іноді така неспецифічна завада може опосередковано служити досягненню цілі тим, що вона підносить сюрприз, збуджує невдоволення і тим самим концентрує увагу в певних напрямках і після того визиває задоволення гармонією, яка переможно взяла верх над завадою пізнання.

Деяким чином цілеспрямована модель завжди є груба модель, збіднена у порівнянні з пізнавальною моделлю.

Іноді доцільно, і прямо такі підказується типом підходу, мати в розпорядженні не тільки одну таку грубу модель, а декілька. При цьому кожна з моделей особливо підкреслює один аспект, що служить меті; в сукупності вони дають краще уявлення про проблему в цілому, ніж кожна з них поодиноці.

Теза 4. Для складного об'єкта, залежно від мети чи застосовуваних допоміжних засобів, а також залежно від творця моделей, можна отримати велику кількість можливих моделей як проекцій цього об'єкта. Тоді ці моделі різним чином висвітлюють різні сторони складного єдиного явища. При одночасному розгляді декількох таких проекцій справа може дійти до появи протиріч, дисонансів.

Це природно. При цьому справа не в тому, щоб коливатися у виборі між різними моделями і шукати підстави, залежно від обставин, вирішити питання на користь однієї з них. Навпаки, ми повинні звикнути до того, щоб жити серед всіх цих моделей, незважаючи на їх протиріччя; ми вимушені використовувати різноманіття цих моделей, щоб мати можливість кращого досягнення наших колективних цілей. Це справедливо для всіх типів відображення за допомогою математичних, технічних, а також естетичних засобів.

1.4 Представлення моделей

До представлення моделі належить вибір середовища і його станів, за допомогою яких кодуються як опорна інформація, так і основні відношення.

Так як побудову моделей можна розуміти як вираження об'єктивних даних на певній спеціальній мові (спец-мові), то необхідно розрізняти семантичну і синтаксичну сторони побудови моделей. Семантика моделі є її вміст, отже, все те, що при проведенні моделі в дію відповідально за схожість змістів моделі і оригіналу. Навряд чи семантика допускає формалізацію; при представленні моделей у зовнішній пам'яті семантика потребує згоди між тим, хто побудував модель, і тим, хто буде її використовувати. Звідси випливають відомі труднощі при складанні програмної документації, оскільки при цьому робиться спроба за допомогою синтаксичного представлення передати по можливості без непорозумінь точку зору укладача програми тому, хто буде цією програмою користуватися. Фактично всяка програмна документація може розумітися як деяка груба модель власне програми. Фактично всяка програма є представленням алгоритму, а останній, у свою чергу, може розглядатися як модель ідеального процесу обробки даних, протягом якого вхідна інформація повинна перетворитися в бажану вихідну інформацію.

Якщо той, хто використовує модель, не має доступу до пов'язаної з нею семантики, то він також не може правильно інтерпретувати модель; він змушений бути в змозі «розуміти» її за допомогою своїх власних внутрішніх моделей. Мабуть, з цієї причини так багато непорозумінь і невірних інтерпретацій буває при виконанні художніх творів.

Синтаксис моделі є основою для семантики, тобто сукупність формальних допоміжних засобів моделі для представлення її опорної інформації, її основних відносин, її ієрархічної структури.

У музиці основними знаками є окремі тони; суперзнаками можуть бути характеристичні послідовності тонів, а також акорди. У літературі основні знаки – це букви, а суперзнаки – слова. У живописі в якості основних знаків виступають кольори, а роль суперзнаків грають певні колірні поєднання. У математичних моделях букви, числа, позначення змінних і операцій є основними знаками; фіксовані комбінації таких основних знаків, наприклад певні оператори, можна розглядати як суперзнаки. Так, наприклад, для процедур в алгоритмічних мовах домовляються про фіксовані найменування за якими ці процедури можуть бути викликані. Ці жорстко обумовлені найменування грають роль суперзнаків. Або інший приклад. В аналоговій техніці суперзнаками є такі основні оператори, як суматор, помножувач, інтегратор.

У випадку формування організму виходить мало не модельна інтерпретація; згідно з цим, кожен організм, який сформувався, слід розуміти як здійснений будівельний план. Під час цієї інтерпретації можуть відбуватися випадкові зміни послідовностей амінокислот. Так, завдяки зворотному впливу на послідовності нуклеїнових кислот можуть виникнути спотворені будівельні плани. Вони можуть приводити до клітин, життєздатних в середовищі; тоді виникає зародок, що приводить до розгалуження в еволюції виду. Однак більша частина таких мутацій не є корисною, і тоді відповідні їм клітини нового типу гинуть.

Ці випадкові впливи, які можуть приводити до розгалуження еволюційного процесу, порушують закостенілий детермінізм, зумовлений будівельними планами, і приводять до того, що природа краще використовує об'єктивні умови кожного еволюційного періоду, коли

вичерпані детерміновані можливості. За образом дифузійного процесу розвивається різноманітна природа, що заповнює рамки можливостей, встановлені для життя об'єктивними умовами.

1.5 Адекватність моделі оригіналу

Так як в кожному випадку модель виконує функцію деякого замітника оригіналу, то повинна досягатися відповідність даної мети адекватності моделі оригіналу.

Теза 5. Модель адекватна оригіналу, якщо при її інтерпретації виникає портрет, значною мірою схожий з оригіналом. При цьому, як правило, схожість оригіналу і його портрета, отриманого за допомогою моделі, потребує кількісної оцінки.

Так як всяка модель має характер проекції, ніколи не можна говорити про абсолютну адекватність, при якій модель у всіх рисах дорівнює оригіналу. Отже, оцінка ступеня подібності може спиратися тільки на оцінку відмінності від оригіналу.

Оцінювання відмінності наштовхується природним чином на великі труднощі, оскільки зазвичай неможливо використовувати для порівняння об'єкт у всій його дійсної цілісності.

Всяка реальна дійсність як завгодно складна. Тому відповідно до наявної мети насамперед приймаються погодження про клас систем для опису реального об'єкта. Отже, при моделюванні поведінки на основі погоджень, наприклад, про лінії розділу суттєвого і несуттєвого проводиться розбиття величин на вхідні і вихідні величини і на стани.

Розглядаючи описаним чином реальну систему як певну конкретну систему, будують модель відповідно до поставленої мети, причому на цьому другому кроці робиться великий наголос на формалізований опис. Зіставлення, що служить оцінкою адекватності, може ставитися тільки до цього другого етапу, тобто до етапу суджень про відмінності в поведінці конкретної системи.

Цей факт, який, природно, має велике значення для всіх процесів проектування і конструкторських розробок, направляє нашу увагу на так звані передові моделі як на окремий випадок так званих ідеальних моделей.

Ми розрізняємо матеріальні та ідеальні моделі. Про матеріальні моделі ми говоримо тоді, коли в якості моделі створюється матеріальний об'єкт, адекватний реальному об'єкту і по своїх конкретних властивостях призначений деяким чином замінювати реальний об'єкт. Ідеальною модель є тоді, коли властивості реального об'єкта описуються формалізовано, так що можлива імітація реального об'єкта, або за допомогою ідеальної моделі можливо виготовити матеріальну модель. Ідеальну модель, для якої реальний об'єкт ще не існує, але міг би бути побудований на основі накопиченої інформації, ми назвемо передбачаючою моделлю.

Моделі повинні надавати підтримку людині в його активній діяльності при взаємодії з природою, при поліпшенні людського суспільства. Їх необхідно інтерпретувати і використовувати, оскільки, тільки виконуючи свої конкретні функції, вони розширюють інтелектуальні можливості людини.

З одного боку, для цього необхідна відома врівноваженість самого процесу побудови моделі, щоб певні сторони моделі, що мало сприяють досягненню мети, не підкреслювалися надмірно на шкоду більш важливим

сторонам. Холл у своєму виступі правильно застерігав від зловживання математичним апаратом при побудові моделей.

З іншого боку, процес побудови моделей повинен тривати до тих пір, поки моделі не стануть приносити безпосередню практичну користь. Творець моделі, який серйозно бажає сприяти поліпшенню будь-яких умов, зобов'язаний сам внести великий внесок при впровадженні своїх моделей і, таким чином, показати на практиці, що за допомогою запропонованих ним модельних конструкцій можна досягти поставлених цілей, і продемонструвати, як це краще зробити.

При використанні моделей в техніці, економіці, соціології, а також біології значну роль відіграють так звані моделі поведінки.

Модель (поведінки) M реального об'єкта O є тоді, коли:

а) реальний об'єкт сприймається як конкретна система в розрізі діалектичної пари суттєве-несуттєве;

б) суттєвим величинам конкретної системи O відповідають деякі величини моделі M ;

в) певним співвідношенням між істотними величинами в конкретній системі O відповідають аналогічні співвідношення між образами цих величин в моделі M .

Вибір суттєвих величин і співвідношень між ними знаходиться під впливом наявної мети.

Теза 6. Моделі поведінки повинні адекватно відображати під певним кутом зору поведінку реальних систем в сенсі відповідності між причинами і наслідками.

При цьому причини формалізуються за допомогою так званих вхідних величин Y_t , а наслідки – за допомогою так званих вихідних величин X_t . У випадку динамічних систем причинно-наслідкові відношення можуть залежати ще від передісторії. Для зберігання

інформації, що визначає причинно-наслідкову відповідність і одержується з передісторії системи, служать так звані координати стану Z_t . У загальному вигляді зв'язки між величинами Y_t , Z_t , і X_t формалізуються в так званій моделі автомата (детермінованого і недетермінованого, або стохастичного) як найбільш загальній концепції систем в задачах побудови моделей.

Теза 7. Головна мета всякого моделювання поведінки є передбачення. Хотілося б кількісно виразити поведінку системи, щоб мати можливість передбачати з необхідною точністю майбутнє або реакцію системи на такі вхідні сигнали, які не використовувалися при побудові моделі.

2 ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ. ОСНОВНІ ВИМОГИ

2.1 Поняття математичної моделі

Почнемо з найпростішого прикладу (рис. 2.1). Нехай тіло масою m коливається на горизонтальній площині під дією пружини нульової маси з жорсткістю k . Припустимо, що протидіючі сили (зокрема, сила тертя) нехтовно малі і нас цікавлять характер і частота коливань.

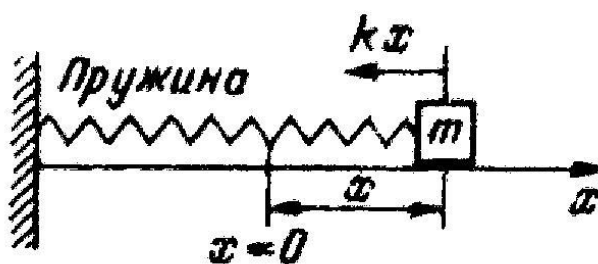


Рис. 2.1. Схема до прикладу

Тоді, якщо положенню вантажу відповідає координата x , то на нього діє сила $-kx$. Використовуючи другий закон Н'ютона, отримуємо диференціальне рівняння:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$

тобто

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (2.1)$$

з загальним розв'язком

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t. \quad (2.2)$$

Тут, C_1 , C_2 – довільні постійні, що визначаються, наприклад, з початкових умов. Таким чином, тіло здійснює гармонійні коливання з

центром в точці $x=0$, з довільною амплітудою і з кутовою частотою $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Ми бачимо, що твердження, що нас цікавлять, отримані не з безпосереднього розгляду механічної системи (рис. 2.1), а з розв'язку диференціального рівняння (2.1). Це рівняння є математичним записом фізичних умов і законів, що визначають процес коливання системи, і тому називається математичною моделлю даної системи (або процесу її коливань).

Звісно, рівняння (2.1) описує не всі сторони розглянутого процесу. Так, з нього не можна знайти амплітуду коливань: для цього потрібні додаткові дані – наприклад, початкові умови. Далі, в реальній системі коливання врешті рещт затухають, але жодних відомостей про це ми отримати з рівняння (2.1) не можемо. Для деяких питань можуть виявитися істотними форма тіла або розташування його центру мас, про що рівняння (2.1) також не говорить, і т.д.

Перейдемо до загального визначення. Нехай ми збираємося досліджувати деяку сукупність S властивостей реального об'єкта a за допомогою математики (тут термін «об'єкт» розуміється в найбільш широкому сенсі: об'єктом може служити не тільки те, що зазвичай іменується цим словом, але й будь-яка ситуація, явище, процес тощо). Для цього ми вибираємо (як кажуть, будуємо) «математичний об'єкт» a' – систему рівнянь, або арифметичних співвідношень, або геометричних фігур, або комбінацію того і іншого і т.д., – дослідження якого засобами математики і повинно відповісти на поставлені питання про властивості S . У цих умовах a' називається *математичною моделлю об'єкта a щодо сукупності S його властивостей*. Так, в розглянутому прикладі об'єктом a

була коливальна механічна система, об'єктом a' – рівняння (2.1), сукупністю S – характер і частота коливань.

2.2 Загальна схема застосування математики

Математика застосовується не безпосередньо до реального об'єкту, а до його математичної моделі. У найзагальніших рисах схема цього застосування наступна.

Виходячи з реального об'єкта, формулюються його властивості, що цікавлять нас і інші пов'язані з ними, мовою тієї чи іншої науки, іншими словами, будуємо *механічну*, або *фізичну*, або *біологічну*, або *соціальну* і т. п. модель об'єкта; таку модель ми будемо надалі називати *змістовною*. Так, у прикладі п. 2.1 змістовна (механічна) модель була описана в першому абзаці пункту і схематично зображена на рис. 2.1. При побудові змістовної моделі формулюються і відповідні *гіпотези* (також кажуть – *постулати моделі*); в прикладі п. 2.1 – це гіпотези про лінійну залежність сили пружності пружини від її розтягування, про рівність нулю маси пружини, а також про відсутність протидіючих сил. Крім того, включення моделі в ту чи іншу науку дає можливість застосовувати закони та інші твердження, встановлені в цій науці (у прикладі п. 2.1 – другий закон Ньютона). Зрозуміло, що при побудові змістовної моделі ми відволікаємося від різного роду неідеальностей, неправильностей досліджуваного реального об'єкта (звичайно, якщо ці неідеальності не є самі предметом дослідження), переходимо до його спрощеного, схематичного опису.

На основі змістовної моделі ми виписуємо відповідні рівняння або якось інакше переводимо її на формальну математичну мову і тим самим переходимо до математичної моделі; в цьому полягає перший етап – побудова моделі. Він істотно спирається на неформальне обговорення постановки задачі і необхідну кваліфікацію дослідника в розглянутій області.

Другий етап полягає у вивченні математичної моделі, простіше кажучи – вирішенні отриманої математичної задачі. Ми вибираємо метод цього рішення і реалізуємо його; сюди входить і проведення всіх необхідних обчислень, у тому числі і на ЕОМ. Це вивчення проводиться в рамках математики, але є і одна важлива особливість. Всі елементи математичної моделі (зокрема, всі величини, які беруть участь) є як би мітками відповідних реальних елементів. Це дасть можливість в процесі розв’язання математичної задачі залучати додаткові відомості, які можуть спростити цей процес, або виділять з декількох розв’язків необхідний, і т. д.

Отримавши розв’язок математичної задачі, нам потрібно його проаналізувати, розібратися в його реальному сенсі, зробити висновки. У цьому полягає третій етап – етап інтерпретації (тлумачення) результату дослідження математичної моделі. У нього може входити і контроль правильності (як кажуть, *верифікація*) моделі на основі порівняння результату з іншими відомими факторами, зокрема з експериментальними даними, і т. д.

Описані етапи тісно пов’язані між собою, і їх розчленування є до певної міри штучним. Математична модель зазвичай будується з орієнтацією на передбачуваний метод вирішення математичної задачі – зокрема, з урахуванням того, чи будемо ми залучати ЕОМ і, якщо будемо, то якої потужності. З іншого боку, при проведенні математичного

дослідження або інтерпретації розв'язку може знадобитися уточнити або навіть суттєво змінити математичну модель.

На останок відзначимо, що в навчальних вправах, а також у багатьох наукових дослідженнях зазвичай будують математичну модель не конкретного реального об'єкта, а «умовно реального», як це зробили і ми в п. 2.1, тобто, по суті, відправляються від уже готової змістовної моделі. Звісно, це полегшує справу.

2.3 Множинність і єдність моделей

Реальний об'єкт може мати кілька нерівносілних математичних моделей. Це насамперед пов'язано з необхідністю дослідження різних систем S_1, S_2, \dots його властивостей. Але навіть принципово різні математичні моделі розглянутого реального об'єкта можуть з'явитися і при вивченні однієї і тієї ж системи властивостей. Так, об'єкт можна описувати за допомогою як безперервної, так і дискретної моделі, як детермінованою, так і стохастичною, і т. д. Вибір типу моделі, досить істотний для напрямку дослідження, може, звісно, підказуватись модельованим об'єктом або розумними традиціями, проте і тоді корисно мати на увазі можливість змінити цей тип. (Втім, нерідко тип моделі вибирається із сліпого наслідування або визначається прогалинами в освіті дослідника). Для складного реального об'єкта порівняння результатів його дослідження за допомогою моделей різного типу може збагатити знання про нього, а також значно підвищити їх достовірність.

Побудова різних моделей одного і того ж об'єкта може мати за мету різну точність, деталізацію його властивостей. Так, у прикладі п. 2.1 ми

можемо побажати врахувати вплив протидіючих сил(малих за припущенням). Приймаючи гіпотезу в'язкого тертя, згідно з якою протидіюча сила пропорційна швидкості, ми замість (2.1) приходимо до рівняння:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.3)$$

з малим коефіцієнтом тертя f , тобто до іншої математичної моделі, хоча й того ж типу, що й перша.

Загальні риси математичної моделі вимальовуються вже при формулюванні змістовної моделі досліджуваного об'єкта. Однак і після цього зазвичай бувають можливі різні видозміни математичної моделі: в рівняннях можна відкидати будь-які члени або дописувати нові, нелінійні залежності замінити лінійними і навпаки, ускладнювати чи спрощувати геометричні форми і т. д.

Можлива і зворотна картина: різні реальні об'єкти або різні змістовні моделі можуть мати одну і ту ж математичну модель – наприклад, описуватися однаковими диференціальними рівняннями. Так, не важко показати, що сила $j = j(t)$ електричного струму, збудженого в деякий момент в замкнутому контурі, що послідовно містить опір R , індуктивність L і ємність C , задовольняє рівнянню

$$L \frac{d^2 j}{dt^2} + R \frac{dj}{dt} + \left(\frac{1}{C} \right) j = 0.$$

Це рівняння з точки зору математики збігається з (2.3), так як позначення і фізичний зміст величин, які беруть участь, з цієї точки зору несуттєві. Те ж рівняння при іншому сенсі букв описує різноманітні *осцилятори* (коливальні системи) і іншої природи. Тому, вивчивши математичну модель, ми можемо часто робити висновки про властивості

різноманітних об'єктів. Крім того, якщо різні об'єкти мають однакову математичну модель, то стає можливим моделювати один з цих об'єктів іншим. Наприклад, замість дослідження коливань складної лінійної механічної системи можна проводити вимірювання в відповідно підібраному електричному колі, що має ту ж математичну модель. На цьому заснована дія електромеханічних, оптико-механічних та інших аналогових пристроїв. Чудово, що при застосуванні таких пристроїв сама математична модель наче залишається осторонь (значення механічних величин, що нас цікавлять, безпосередньо виходять за результатами електричних вимірювань), хоча саме на єдності моделі заснована можливість цього застосування.

Уміння правильно вибрати математичну модель з уже відомих або, тим більше, побудувати таку заново вимагає необхідних математичних і спеціальних знань і відповідних навичок. Як пише А. Н. Тихонов, «досвід показує, що в багатьох випадках правильно вибрати модель – значить вирішити проблему більш ніж наполовину».

2.4 Вимога адекватності

Найважливішою вимогою до математичної моделі є вимога її *адекватності* (правильної відповідності) досліджуваному реальному об'єкту a щодо обраної системи S його властивостей (див. п. 2.1). Під цим насамперед розуміється:

1) правильний якісний опис розглянутих властивостей об'єкта: наприклад, можливість на підставі дослідження моделі зробити правильний висновок про напрямок зміни будь-яких кількісних

характеристик цих властивостей, про їх взаємозв'язки, про характер коливань об'єкта, про стійкість його стану або еволюції і т.п.,

2) правильний кількісний опис цих властивостей з деякою розумною точністю.

Відповідно до того, ставиться умова 2 чи ні, говорять відповідно про *кількісні* або *якісні моделі*. Замість кількісної адекватності говорять також про *точність моделі*.

В областях, ще не підготовлених для застосування розвинених кількісних математичних методів, або в тих областях, де кількісні закономірності виявляються не цілком чітко (наприклад, в деяких соціальних або біологічних науках), математичні моделі є, як правило, по необхідності лише якісними. Навіть у техніці, де застосування математики давним-давно апробовано, модель може виявитися лише якісною через складність досліджуваного об'єкта. Однак і тоді виявлення на моделі істотних властивостей цього об'єкта допомагає правильно орієнтуватися.

Зазвичай мова йде не тільки про адекватність моделі, але також про більшу чи меншу адекватність. Підкреслимо, що цю адекватність слід розглядати тільки за певними ознаками – властивостями, прийнятими в даному дослідженні за основні. Якщо вони явно не вказані, то повинні матися на увазі або уточнюватись по ходу дослідження.

Для коливальної системи п. 2.1 з повільним згасанням модель (2.1) адекватна по відношенню до частоти коливань і певною мірою до характеру коливань, так як на невеликому інтервалі часу загасанням коливань можна знехтувати. Однак, якщо нас цікавить швидкість цього загасання (нехай мала, але все ж існуюча), то модель (2.1) неадекватна, а в якості адекватної моделі можна взяти рівняння (2.3).

Забуття того, що *будь-яка адекватність математичної моделі реальному об'єкту лише відносна та має свої рамки застосування*, може

привести (та не раз приводило) до грубих помилок, заснованих на неконтрольованому приписувані реальному об'єкту властивостей його моделі – наприклад, до всерйоз висловлюваного твердження, що швидкість поширення тепла «насправді» нескінченна.

У більш складних випадках неадекватність або низька адекватність моделі буває не настільки очевидною, і ми можемо говорити про адекватність лише з деякою часткою впевненості. Ця впевненість підвищується, якщо наслідки прийнятої моделі добре узгоджуються з надійно встановленими фактами або фізичним експериментом.

Доволі часто буває, що модель, побудована для вивчення деяких властивостей об'єкта, адекватність якої встановлена по відношенню до цих властивостей, виявляється адекватною і по відношенню до якихось інших властивостей. Це й не дивно, особливо якщо модель виводиться з добре перевірених фізичних законів та апробованих у досліджуваному колі питань способів застосування математики. Тому, кажучи про математичні моделі та їх адекватності, часто не згадують про те, які саме властивості об'єктів моделюються. В цьому немає біди, якщо не втрачати пильності та не забувати про принципову обмеженість області можливого застосування будь-якої математичної моделі.

2.5 Вимога достатньої простоти

Якщо орієнтуватися лише на вимогу адекватності, то складним моделям варто надавати перевагу перед простими. Справді, ускладнюючи модель, ми можемо врахувати більшу кількість факторів, які можуть так чи інакше вплинути на досліджувані властивості. Так, в прикладі п. 2.1 при розгляді частоти коливання модель (2.3) має вищу адекватність, ніж (2.1), так як із рівняння (2.3) ми отримуємо значення кутової частоти з врахуванням малого тертя:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{f^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{f^2}{4mk}\right)^{1/2}} \approx \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{f^2}{8mk}\right)}$$

(при переході до наближеної рівності застосована формула Тейлора).

В даному прикладі розв'язок ускладненого рівняння не викликав труднощів. Але в інших, особливо в нестандартних, ситуаціях надмірне ускладнення моделі може призвести до громіздких систем рівнянь, що не піддаються вивченню та розв'язку.

Таким чином, ми приходимо до вимоги *достатньої простоти моделі* по відношенню до досліджуваної системи і її властивостей. А саме: модель являється достатньо простою, якщо наявні в нашому розпорядженні засоби дослідження дають можливість провести в прийнятні терміни та економно по затратах праці та засобів, але з розумною точністю, якісний або кількісний – в залежності від постановки задачі – аналіз досліджуваних властивостей і осмислити результат.

Ясно, що вимога простоти моделі в певному сенсі протилежна вимозі її адекватності: як правило, чим адекватніша модель, тим менш вона проста і тим складніший її аналіз. (Втім, частими є випадки, коли ускладнення моделі може погіршити її адекватність: так буває, наприклад,

якщо при виписуванні додаткових рівнянь залучаються параметри, відомі з досить низькою точністю, або якщо самі ці рівняння сумнівні.) Тому часто буває, що, вибравши модель, доводиться її спрощувати, тобто переходити до нової моделі. При цьому можна спрощувати або змістовну модель об'єкта, або її математичну модель. Досвідчений спеціаліст зазвичай іде по першому шляху, так як при цьому залишаються виконаними найбільш суттєві фізичні співвідношення та більш зрозумілі постулати моделі.

2.6 Деякі інші вимоги

Суттєвою являється також властивість *повноти* математичної моделі, яка полягає у тому, що ця модель дає принципову можливість за допомогою математичних методів отримати твердження, які нас цікавлять. Так, у прикладі п. 2.1, якщо ми в якості моделі обмежуємось рівнянням (2.1), то для визначення частоти коливань ця модель являється повною, а для визначення амплітуди – неповною, так як для останнього потрібні додаткові дані.

Ще одну важливу вимогу до математичної моделі можна назвати її *продуктивністю*. Вона пов'язана з тим, що досліджуваний об'єкт може включати різні параметри – такі, як маси, довжини і т.п. його компонент, включати функціональні залежності, які вважаються заданими та описують зв'язки між розглянутими величинами (наприклад, зв'язок між зусиллям та переміщенням у випадку нелінійного закону пружності). Всі ці задані параметри та залежності, що називаються *вихідними даними* моделі, впливають на значення величин, отриманих в результаті розв'язку математичної задачі. Зазначена вимога полягає в тому, щоб у реальних

ситуаціях вихідні дані можна було б дійсно вважати заданими, тобто, щоб їх можна було би якось виміряти, або підрахувати, або знайти в довідниках і т.п. При цьому, якщо мова йде про вимірювання, то вихідні дані повинні легше піддаватись вимірюванню, ніж отримувані, так як в іншому випадку втрачається сенс дослідження моделі.

Якщо реально отримати вихідні дані складно, то після вивчення математичної моделі ми дізнаємось лише які властивості можуть мати об'єкти із класу, що розглядається, але іноді властивості цікавого нам конкретного об'єкта залишаються неясними. Цьому питанню не завжди приділяється достатня увага, що суттєво знижає прикладну значимість багатьох досліджень.

Відзначимо далі вимогу робастності (від англ. слова “*robust*” – міцний) моделі, тобто її стійкості відносно похибок у вихідних даних. Завжди потрібно мати на увазі, що ці дані можуть бути відомі лише з більшою чи меншою точністю і така невизначеність не повинна суттєво впливати на результат досліджень. Є ряд правил, що сприяють цій стійкості. Так, слід уникати віднімання близьких один одному приближених значень величини, тому що при такому відніманні відносна похибка різко зростає: образно кажучи, не варто обчислювати масу шляпи, зважившись спочатку в шляпі, а потім без неї і взяти різницю результатів. Вирази, що містять такі різниці, варто перетворювати.

Бажаною, хоча і не обов'язковою являється властивість *наочності* математичної *моделі*. Під цим зазвичай розуміють більш чи менш безпосередній, зрозумілий змістовне значення її компонент, який дає можливість не лише зайвий раз проконтролювати модель, але іноді і намітити план розв'язку математичної задачі, а також орієнтовно передбачити результат розв'язку, що може суттєво прискорити процедуру. Так, в рівнянні (2.3) послідовні доданки – це (з протилежним знаком) сили

інерції, тертя та пружності, а саме рівняння являється записом для системи відомого принципу механіки, що розглядається: сума всіх сил, що діють на тіло (включаючи сили інерції), рівна нулю.

3 ТИПИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

3.1 Структурні та функціональні моделі

Зазвичай в математичній моделі відображається структура (устрій) модельованого об'єкта, суттєва для цілей дослідження властивостей та взаємозв'язку компонентів цього об'єкта; така модель називається *структурною*. Якщо ж модель відображає лише те, як об'єкт функціонує – наприклад, як він реагує на зовнішній вплив, – то вона називається *функціональною* або, образно, *чорним ящиком*. Можливі і моделі комбінованого типу.

3.2 Дискретні та неперервні моделі

Як відомо, величини можуть бути двох типів – дискретні, тобто ті, що приймають “відірвані” один від одного значення та неперервні, що приймають всі значення з деякого інтервалу. Можливий також змішаний випадок, наприклад, коли величина на якомусь інтервалі своїх значень поводить себе, як дискретна, а на іншому – як неперервна. (Ці визначення не являються вичерпними, але для нас вони достатні.)

Подібним чином, моделі – як змістовні, так і математичні – можуть бути або дискретними, або неперервними, або змішаними. Між цими типами немає принципового бар'єру та при уточненні або видозміні моделі дискретна картина може стати неперервною та навпаки; те ж саме може відбутись в процесі розв'язку математичної задачі. Таким чином, у багатьох задачах при складанні математичної моделі, а також при виборі

методу її дослідження потрібно враховувати можливість застосування як “дискретного”, так і “неперервного” апаратів незалежно від характеру вихідної картини.

3.3 Лінійні та нелінійні моделі

Лінійна залежність однієї величини від іншої – це пропорційність їх приростів, тобто залежність типу $y = ax + b$, звідки отримуємо $\Delta y = a\Delta x$ (Δ – звичайне позначення приросту); аналогічно, лінійна залежність величини від двох інших – це залежність типу $z = ax + by + c$, звідки $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$, і т.д. Типові лінійні залежності між фізичними величинами – закон Гука (видовження пропорційне силі розтягу), закон Ома, закон теплового розширення і т.д. В дійсності ці залежності являються лінійними лише наближено, але у відповідних, зазвичай встановлених емпірично діапазонах зміни величин припущення про лінійність виконується з хорошою точністю і в той же час суттєво спрощує дослідження.

Аналогічно визначається поняття лінійної моделі. Воно застосовується для моделей об’єктів, що розглядаються як *перетворювачі*, для яких кожному *входу* відповідає деякий *вихід*. Так, якщо ми вивчаємо задачу про прогин прямолінійного стержня під дією поперечно розподіленого навантаження, то входом можна вважати її щільність $q(t)$, а виходом – прогин $y(t)$. Якщо вивчається задача про вимушені коливання осцилятора, то входом можна вважати закон зміни зовнішньої сили $F(t)$, а виходом – закон коливання $x(t)$ і т.д. В математиці такий перетворювач

називається *оператором*. (До речі, і будь-яку функцію можна трактувати як перетворювач, у якого входом служить значення аргументу або набір значень аргументів, якщо їх декілька, а виходом – значення функції.)

Будемо вважати, що початок відліку входу та виходу обрані так, що нульовому входу відповідає нульовий вихід. Тоді модель називається *лінійною*, якщо в ній виконується *принцип суперпозиції* (накладання), тобто при додаванні входів додаються і виходи, а при множенні входу на будь-яке число вихід множиться на те ж число. Якщо цей принцип не виконаний, модель називається *нелінійною*. Лінійні моделі зазвичай описуються лінійними неоднорідними рівняннями – алгебраїчними, диференціальними і т.д., в яких неоднорідний член відповідає входу, а розв'язок – виходу.

Необхідно мати на увазі, що існують принципово нелінійні об'єкти (в тому числі явища), для яких застосування лінійних моделей призводить до грубих спотворень картини. Це перш за все системи, для яких зміна масштабу впливу приводить до якісної зміни результату. Типовим прикладом можуть служити механічні системи з сухим тертям, для яких мала сила не породжує рух, а велика – породжує; взагалі, наявність будь-яких бар'єрів подібного роду – це типовий нелінійний ефект. Суттєво нелінійною являється також задача про дослідження близькокритичного стану об'єкта, що залежить від параметрів, коли при їх змінюванні стійкість змінюється нестійкістю або один тип руху – іншим і т.п. У всіх таких випадках потрібно застосовувати методи нелінійного аналізу, які можна знайти у спеціальній літературі.

3.4 Лінеаризація

Вигоди лінійності бувають настільки великими, що наближена заміна нелінійних співвідношень на лінійні, нелінійних моделей на лінійні, тобто *лінеаризація* співвідношень, моделей і т.д. досить поширена. Така лінеаризація звичайно проводиться у двох випадках: або якщо експеримент показує (як, наприклад, для закону Гука), що відхилення від лінійності в розглянутих діапазонах зміни змінних невелике та несуттєве, або ж, якщо ці діапазони малі та ми замінюємо приріст змінних на їхні диференціали, відкидаючи члени вищого порядку малості. (У другому випадку застосовується також лінійне інтерполювання.)

3.5 Детерміновані та імовірнісні моделі. Інші типи моделей

Математична модель може включати випадкові компоненти — випадкові скалярні чи векторні величини, випадкові послідовності чи функції, випадкові структури і т.п., що задовольняють статичним законам. Такі моделі називаються імовірнісними або стохастичними (від грецького слова «стохастікос» — той, що вміє вгадувати), на відміну від детермінованих (від латинського слова «детермінос» — визначаю) моделей, які таких компонентів не містять. Так, якщо будь-який елемент досліджуваного об'єкта являється виробом масового виробництва і на властивості, що нас цікавлять, можуть помітно вплинути відхилення параметрів від їх номінальних значень, то ці параметри часто вважають випадковими величинами. Випадкові функції з'являються, наприклад, при

розгляді впливу вітру на які-небудь споруди, сигналів на фоні шуму, шаршавих поверхонь, турбулентних рухів рідин і т.д.

Імовірнісні моделі вивчаються за допомогою методів теорії імовірності. На жаль, доволі часто буває, що імовірнісні характеристики випадкових компонентів (математичне очікування і дисперсія випадкових величин, тим більше закони розподілення останніх, а також аналогічні характеристики випадкових функцій) виявляються відомими з досить невисокою точністю або навіть зовсім невідомими, тобто модель не задовольняє вимоги продуктивності. Методи математичної статистики направлені на визначення таких характеристик, але і ці методи не завжди вдається вдало застосувати. Тому при побудові імовірнісних моделей потрібно приділяти суттєву увагу джерелу таких характеристик. Якщо вони не піддаються визначенню з необхідною точністю, то можна спробувати пошукати іншу модель, можливо більш грубу, але і більш стійку відносно прогалин у знанні вихідних даних. Наприклад, іноді вдається провести дослідження та обчислення за максимальним відхиленням розглянутих параметрів.

Наведемо приклад. Нехай x – розв’язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} + a(t; \omega)x = 0 \quad (0 \leq t < \infty), \quad x(0) = 1,$$

де a – випадкова функція (змінна ω , як це прийнято в теорії імовірності, має сенс елементарного результату). Тоді і $x = x(t; \omega)$ – випадкова функція, характеристики якої суттєво залежать від характеристик функції a . Але нехай не є можливим детально дізнатись характеристики функції a , відомо лише, що завжди $1 \leq a \leq 2$. Тоді, підставивши крайні можливі значення, ми отримаємо гарантовану оцінку розв’язку: $e^{-t} \leq x \leq e^{-2t}$; із неї, наприклад, виходить, що $x(t; \omega) \rightarrow 0$ з експоненційною швидкістю при $t \rightarrow \infty$.

Застосовується класифікація моделей і за іншими ознаками. Так, розрізняють *статистичні* та *динамічні (еволюційні)* моделі; для другого типу моделей предметом дослідження є зміна розглянутого об'єкта у часі. Проміжне місце займають *квазістатичні, стаціонарні та квазістаціонарні* моделі. В квазістатичній моделі приймається, що зміна об'єкта проходить так повільно, що при розгляді ситуації в кожен момент часу можна в першому наближенні об'єкт вважати статичним (грубо кажучи, знехтувати інерційними силами), а час вважати додатковим параметром. В стаціонарній моделі вважається, що процеси відбуваються, але досліджуваний об'єкт у часі не змінюється; найпростіший приклад – електричне коло з постійним струмом. Так визначається і квазістаціонарна модель.

У зв'язку з перерахованими зараз типами моделей згадаємо ще про застосовувані тут терміни: *встановленим* процесом зазвичай називають стаціонарний або періодичний процес; *перехідним* процесом називають процес переходу від одного статичного стану або встановленого процесу до іншого.

4 ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

4.1 Про змістовну модель

Очевидний, але важливий початковий етап побудови або вибору математичної моделі – це отримання по можливості більш чіткого представлення про модельований об'єкт та уточнення його змістовної моделі, заснованої на неформальних обговореннях. Неможна шкодувати часу та зусиль на цей етап, від нього у значній мірі залежить успіх всього дослідження. Не раз бувало, що значні зусилля, затратені на розв'язок математичної задачі, виявлялись малоефективними або навіть витраченими даремно через недостатню увагу до цієї сторони справи.

В задачах тих типів, які ми розглядаємо, цей етап зазвичай полягає в уточненні структури досліджуваного об'єкта, суттєвих для дослідження властивостей його компонентів, що проводиться, і характеру їхньої взаємодії. Нехай, наприклад, ми вивчаємо дію деякого механічного пристрою. Тоді ми починаємо зі з'ясування того, з яких частин він складається, які його властивості, як ці частини взаємодіють, які сили при цьому виникають. А також чи не можуть якісь механічні процеси (теплові, електричні і т. д.) помітно вплинути на досліджувану ситуацію.

Змістовну модель, особливо при початковому дослідженні, бажано при можливості спростити (але, звісно, так, щоб при цьому не спотворити якісну картину явища): грубу модель можна в подальшому уточнити. Так, ми вияснюємо, чи можна прийняти той чи інший елемент пристрою за матеріальну точку чи за абсолютно тверде тіло; якщо форма цього елемента важлива, то чи не можна вважати її простою і т. п. При такому спрощенні необхідно використовувати аналогії з іншими успішно вирішеними задачами, з іншим власним чи чужим досвідом. Але, звісно, не

можна бездумно користуватися готовими схемами, так як вирішення кожної нової задачі потребує нових, часом принципово нових, міркувань.

Якщо твердий елемент пристрою податливий, то необхідно з'ясувати характер податливості, тобто чи потрібно вважати деформації пружними чи пластичними і т. д., чи можна вважати матеріал однорідним і ізотропним. Якщо в систему, що розглядається, входять сипучі тіла, ґрунт чи інші «некласичні» середовища, то треба уточнити, які з необхідних нам властивостей цих середовищ відомі. Аналогічно уточнюються властивості рідких і газоподібних компонент: наявність в'язкості, стисливості, характер руху (ламінальний, турбулентний) і т. п.

При спрощенні складних структур широко застосовується усереднення. Так, багатокомпонентні середовища (композити, суспензії і т. п.) замінюються на однокомпонентні з відповідно підібраними властивостями; дискретні навантаження, що повторюються, з'єднання (типу заклепувальних швів), інші конструктивні елементи – на неперервні, якщо це спрощує дослідження усереднюються також зовнішні впливи, що швидко коливаються.

Важливу роль грає з'ясування сил, що діють в системі, як зовнішніх, так і внутрішніх. І тут намагаються здійснювати спрощення: малоістотні сили ігноруються (їх можна врахувати при уточненні дослідження); якщо можливо, проводиться групування сил з заміною їх на рівнодійні і т. п.

4.2 Формулювання математичної задачі. Задачі аналізу та синтезу

Далеко не завжди питання про те, якого типу математичну задачу ми будемо розв'язувати, навіть, які величини ми будемо шукати, буває

зрозумілим з самого початку. Задача може бути поставлена не в конкретній формі («Знайти частоту коливань даної системи»), а в формі не настільки визначеній («Дослідити поведінку даної системи», «Оптимізувати даний прилад шляхом підбору його параметрів» і т. п.). Тоді потрібне хоча б попереднє уточнення плану дій: які величини було б бажано знайти, які залежності дослідити і звідки їх можна було б отримати, за яким критерієм проводити оптимізацію і т. д. Такий план, який згодом може видозмінюватися і доповнюватися, бажано обдумати на можливо більш ранній стадії дослідження, оскільки він може суттєво вплинути на формулювання математичної моделі: що ми будемо вважати початковими даними, які величини шукати, якого типу рівняння нам знадобляться для цього і т. д. При уточненні математичної моделі ми уточнюємо і план дій, в результаті чітко формулюючи математичну задачу. (Втім, буває, що навіть чітко сформульована задача видозмінюється в процесі подальшого дослідження.)

Прикладні математичні задачі можна умовно поділити на два класи. В задачах одного класу мова йде про дослідження властивостей даного об'єкта – це задачі аналізу. Задачі іншого класу мають за мету вибір об'єкта з деякої сукупності на основі деяких вимог – це задачі синтезу (Термін «задачі синтезу» застосовується і в більш спеціальному сенсі; зокрема, в теорії систем управління він означає задачу про побудову такої системи, що має вказане функціонування на основі застосування зворотного зв'язку.) Звісно, цей поділ умовний, так як багато задач можна в рівній мірі відносити як до одного, так і до іншого класу. Проте зі змістовної постановки задачі найчастіше буває ясно, про задачу якого класу йде мова.

Для задач аналізу, які ми будемо в подальшому в основному розглядати, математична модель зазвичай зводиться до рівнянь того чи

іншого вигляду. Математична модель задачі синтезу також може звестися до розв'язку рівнянь, якщо умови, на основі яких потребується обрати об'єкт, мають вигляд деяких рівнянь. Але часто умова вибору має інший характер: для об'єкта, що обирається, деяка задана скалярна функція його параметрів (цільова функція) повинна прийняти найменше чи найбільше можливе значення. Тоді математична модель зводиться до задачі на екстремум.

4.3 Визначальні співвідношення

Основними «конструктивними елементами» математичної моделі для класу задач, що нами розглядається, є ті чи інші постійні і змінні величини, що входять в склад моделі, і функціональні залежності одних величин від інших. Деякі з постійних величин можуть бути задані (це параметри задачі), інші – шукані; те саме стосується функцій. Модель складається з таким розрахунком, щоб, знайшовши шукані величини і функції, ми могли дати відповідь на поставлені питання. Так, в прикладі п. 2.1 відповідь на питання про характер коливань давала функція $x(t)$, а про частоту – постійна ω_0 .

Задані і шукані величини і функції в математичній моделі зазвичай пов'язуються рівняннями і нерівностями. Більше того, в багатьох випадках, особливо в задачах аналізу, сама модель має вигляд рівняння чи системи рівнянь. Але і у випадку, коли модель містить ще щось, рівняння зазвичай складають її суттєву частину.

Рівняння, що включаються в математичну модель досліджуваного об'єкта, виписуються на основі визначальних співвідношень між величинами, що витікають з постулатів змістовної моделі, як ми це робили в простому прикладі в п. 2.1. Ці постулати можуть мати різне походження і різний ступінь адекватності.

Деякі постулати безпосередньо витікають з універсальних фізичних законів, таких, як закон збереження енергії, другий закон Ньютона (зокрема, застосований в п. 2.1) і т. п. Аналогічну роль грають фізичні закони з обмеженою областю дії, для яких можливість застосування в досліджуваних задачах випливає з універсальних законів, наприклад, якщо мова йде про застосування закону збереження мас в задачах інженерної механіки (В цих задачах зміни мас, що витікають з теорії відносності, явно нехтовно малі.). Повна адекватність таких постулатів безсумнівна.

Проте універсальних і споріднених до них законів в переважній більшості досліджень недостатньо і тому доводиться також користуватися законами, що мають інший характер. Широко застосовуються, зокрема, феноменологічні закони – такі, як закон Гука чи закон Фур'є – тобто достатньо добре емпірично (і частково теоретично) обґрунтовані закони з обмеженою областю дії, також установлені емпірично. При застосуванні феноменологічного закону для побудови математичної моделі досить важливими є питання про саму можливість цього застосування (тобто про відношення досліджуваної ситуації до сфери дії закону) і про наслідки можливих відхилень від цього закону. Буває, що можливість цього застосування вказана в умові задачі, але ці питання все одно виникнуть при застосуванні отриманих результатів до реального об'єкта.

Ще менш універсальний характер мають напівемпіричні співвідношення, що отримуються в результаті поєднання якісних міркувань (зокрема, міркувань розмірності) і обробки результатів

експерименту чи іншої статистики чи виведені з інших співвідношень такого ж характеру. Так, в прикладній аеродинаміці добре відома формула для підйомної сили при плоскому дозвуковому обтіканні крила:

$$P = c_y \frac{\rho v^2}{2} b,$$

де ρ і v – відповідно щільність і швидкість потоку, що набігає, b – хорда профілю крила, а c_y – безрозмірний коефіцієнт, що залежить від форми профілю і напрямку потоку, що набігає. Те, що формула повинна мати такий вигляд, витікає з міркувань розмірності, але для конкретних розрахунків дуже важливо знати, чому дорівнює c_y для різних реальних профілів і «кутів атаки» α , що характеризують напрямок набігання потоку. Це теоретично зробити в принципі можна, але не просто; простіше це зробити емпіричним шляхом продувки моделі в аеродинамічній трубі. В результаті були отримані графіки залежності $c_y(\alpha)$ для багатьох найбільш цікавих профілів.

Застосовуються також і чисто емпіричні співвідношення, що отримуються за допомогою прямої обробки даних спостереження чи експерименту і найчастіше навіть прив'язані до певних одиниць вимірювання.

На жаль, і цих співвідношень часом виявляється не достатньо, і доводиться йти на певний ризик, застосовуючи відомі формули поза рамками, де вони були встановлені, в надії на те, що це не дасть суттєвої похибки чи що похибку можна буде компенсувати шляхом якихось поправок. Часом доводиться також виводити нові формули на основі недостатніх даних. В таких випадках потрібно чітко бачити – і не приховувати від інших – слабкі місця в міркуваннях, так як тут особливо велика небезпека грубих похибок і, зокрема, підгонки рішення під бажаний

результат, який до того ж, особливо після застосування ЕОМ, отримує видимість математичного обґрунтування. В таких випадках математика може принести не користь, а шкоду!

Висновки з недостатньо обґрунтованої моделі необхідно намагатися заново перевіряти, змінюючи модель чи порівнюючи якісь з цих висновків з емпіричними даними чи теоретичними результатами, що отримані незалежно від дослідження, що проводиться.

4.4 Підбір емпіричної формули

Зупинимося особливо на питанні про підбір емпіричної формули для функціональної залежності між величинами.

Нехай ми знаємо, що деяка величина y є функцією іншої величини x , тобто $y = y(x)$, але аналітичний вираз цієї функції нам не відомий і ми хочемо підібрати для нього формулу $y = y(x)$, що описує залежність з достатньою для нас точністю. Нехай далі в результаті експерименту чи спостереження ми отримали ряд значень x і відповідних значень y :

$$x = x_1, x_2, \dots, x_N$$

$$y = y_1, y_2, \dots, y_N.$$

Тоді, якщо N не занадто велике, зазвичай починають з нанесення цих даних на координатну вісь в вигляді окремих точок. При цьому стають видимими точки, що випадають із загального ходу залежності. Вони можуть свідчити про якісь важливі ефекти, які потребують спеціального дослідження, але частіше виникають через суттєві помилки при експерименті або обчисленнях – тоді ці точки просто ігноруються.

Потім треба вибрати вигляд формули, яким ми будемо користуватися. Якщо цей вигляд не впливає з яких-небудь загальних положень, то зазвичай вибирають одну з найпростіших елементарних функцій або їх просту комбінацію (суму степеневих або показникових функцій і т. п.); звичайно, для цього треба добре уявляти собі можливі графіки таких функцій. При цьому стежать за тим, щоб обрана функція $f(x)$ мала ті ж характерні особливості, що і досліджувана функція $y(x)$. Так, якщо за своїм змістовним значенням функція $y(x)$ парна, то і функція $f(x)$ повинна бути парна і т. п.; дуже важливо правильно передати поведінку функції при великих і малих значеннях x , можливу зміну її знака та інші її суттєві риси. На малому інтервалі зміни x часто застосовують найбільш просту – лінійну функцію, а поблизу точки екстремуму – квадратичну функцію. Іноді не вдається підібрати єдину формулу на всьому інтервалі зміни x і доводиться розбивати цей інтервал на частини на кожній підбирати свою формулу.

4.5 Про розмірність величин

У додатках математики – на відміну від курсу самої математики – величини, що розглядаються, як правило, розмірні. Цьому важливому питанню не завжди приділяється необхідна увага, що може послужити джерелом помилок. Нагадаємо, що за визначенням дві величини мають однакову розмірність, якщо їх можна виразити в одних і тих же одиницях виміру. Так, величини $v_1 = 5$ (км/с) і $v_2 = 3$ (фут/год) мають однакову розмірність; це записують так: $[v_1] = [v_2]$. Зазвичай розмірності деяких

величин виражаються через основні. Так, в задачах, пов'язаних з механікою, за основні беруться розмірності довжини (ця розмірність позначається буквою L), часу (T) і маси (M), так що, наприклад:

$$[v_1] = [v_2] = L / T = LT^{-1}.$$

При розв'язанні задач в буквенній формі зазвичай всі формули без особливого застереження вважаються розмірно однорідними, тобто не зв'язаними з певними одиницями виміру величин в рівнянні. Але в числових відповідях ці одиниці зазвичай присутні, тобто розмірна однорідність порушується. Наприклад, широко відома формула для шляху при вільному падінні $s = at^2 / 2$ розмірно однорідна, тоді як та ж формула, записана у вигляді $s = 4,90t^2$, вже не володіє цією властивістю, вона вимагає, щоб s було виражено в метрах, а t – в секундах.

4.6 Подібність об'єктів

Як відомо, дві геометричні фігури подібні, якщо вони мають однакову форму, але, взагалі кажучи, різні розміри. Більш точно це означає, що довжини будь-яких ліній на одній з фігур повинні бути пропорційними довжинами відповідних ліній на іншій фігурі; при цьому коефіцієнт пропорційності називається коефіцієнтом подібності. Наприклад, у подібних трикутників пропорційні не тільки відповідні сторони, але й відповідні висоти, медіани і т. д., все з одним і тим же коефіцієнтом пропорційності. Тому перерахунок довжин при переході від якої-небудь фігури до подібній їй рівносильний тому, що ми залишаємо без змін числові значення всіх довжин, але змінюємо одиницю довжини в k

раз, де k – коефіцієнт подібності. При цьому всі площі змінюються в k^2 разів; безрозмірні характеристики – кути, відповідних сторін або будь-яких інших довжин і т. п. – у подібних фігур однакові. Аналогічно вводиться поняття подібності в інших дисциплінах. Два об'єкти (у тому числі стани, процеси) називаються подібними, якщо вони відрізняються тільки масштабами основних розмірних величин (зокрема, для об'єктів механіки – масштабами довжини, часу і маси). Більш докладно це означає, що перерахунок всіх характеристик об'єкта при переході від нього до подібного об'єкта рівносильний збереженню всіх числових значень величин і заміні одиниць виміру основних розмірних величин; при цьому коефіцієнти подібності по кожній з цих основних величин, взагалі кажучи, різні. Відзначимо, що точніше було б говорити про подібність моделей об'єктів, так як самі об'єкти можуть мати які-небудь додаткові характеристики, які не включені в модель; але ми не станемо змінювати встановлену термінологію. Будь-яка безрозмірна комбінація величин, що характеризує об'єкт, повинна дорівнювати такій же комбінації для будь-якого подібного об'єкта. Подібність двох об'єктів забезпечується збігом для них основних безрозмірних комбінацій із заданих параметрів об'єкта; ці комбінації, що називаються критеріями подібності, вибираються так, щоб вони були незалежними (не виражалися один через одного), але щоб через них виражалися всі інші безрозмірні комбінації параметрів об'єкта. Якщо є всього N незалежних суттєвих параметрів об'єкта, а основних розмірностей n , то критеріїв подібності має бути $N - n$.

Наведемо приклади. Спочатку розглянемо подібність трикутників. Для трикутника маємо три незалежних суттєвих параметри, які його повністю визначають – це його сторони a , b , c . Так як вони мають однакову розмірність, то умова подібності трикутників зі сторонами a , b , c і a' , b' , c' така: $a/a' = b/b' = c/c'$. В даному випадку $N = 3$, $n = 1$; тому

тут маємо $3-1=2$ критерії подібності. За них можна вибрати або відношення b/a і c/a , або відношення b/a і кут C , або кути A і B ; ми приходимо до відомих ознак подібності трикутників.

Приклад. Нехай залізнична цистерна, частково заповнена рідиною котиться з постійною швидкістю v і раптово зупиняється, нас цікавить рух рідини, що при цьому виникає. Якщо цистерна не має перебірки і внутрішньої арматури, то цей рух піддається доволі точному розрахунку, в іншому випадку розрахунок утруднений. Але можна провести спостереження на моделі, виготовленій з точним додержанням пропорцій з геометричним коефіцієнтом подібності k . Виникають питання: якою має бути швидкість моделі; чи необхідно замінити рідину; як перерахувати час фаз процесу з моделі на натуру і т. д.

Ці питання вирішуються за допомогою аналізу розмірностей. На першій стадії процесу, поки затуханням коливань можна знехтувати, суттєві тільки сили інерції і гравітації, а заданими параметрами, при точному додержанні геометричної подібності (включаючи збереження коефіцієнта заповнення цистерни рідиною), можна вважати характерну довжину l цистерни, швидкість v , густину ρ рідини і прискорення g земного тяжіння. Для них є єдиний критерій подібності, за який можна прийняти число Фруда $Fr = gl / v^2$. Таким чином, якщо ми хочемо дотримати подібність процесів, то, поклавши для моделі $l_m = k_l l$, ми повинні покласти і $v_m = k_v v$, де $k_v = \sqrt{k_l}$. Далі, ми бачимо, що густина рідини на даній стадії несуттєва. Крім того, позначивши буквою t час будь-якої фази процесу, отримаємо безрозмірну комбінацію l / gt^2 , рівність якої для моделі і натури приводить до співвідношення $t_m = k_t t$, де $k_t = \sqrt{k_l}$, звідки виводимо формулу для перерахунку часу: $t = t_m / \sqrt{k_l}$.

Якщо ми розглядаємо більший проміжок часу, щоб дослідити затухання коливань, то треба врахувати і в'язкість рідини. Ця в'язкість характеризується кінематичним коефіцієнтом ν , який треба прирахувати до заданих параметрів процесу. Так як $[\nu] = L^2 T^{-1}$, то тут з'являється ще один критерій подібності – число Рейнольдса $Re = \nu l / \nu$, яке теж треба зберегти при переході до моделі. Звідси отримуємо, що повинно бути $\nu_m = k_\nu \nu$, де $k_\nu = k_v k_t = k_l^{3/2}$. Таким чином, для дотримання подібності в'язкість у моделі треба суттєво зменшити: наприклад, якщо модель менше оригіналу в 10 разів, то кінематичну в'язкість рідини при переході від оригіналу до моделі треба зменшити в $10^{3/2} \approx 32$ рази, що приблизно відповідає переходу від нафти до води. Відзначимо ще, що модель не повинна бути занадто малою, щоб у ній не стали відігравати суттєву роль капілярні сили. Справді, ці сили пропорційні площі вільної поверхні рідини, тобто квадрату лінійного розміру, тоді як об'ємні сили пропорційні кубу цього розміру. Тому при зменшенні розмірів капілярні сили стають переважаючими.

5 ЛІНІЙНІСТЬ І НЕЛІНІЙНІСТЬ СИСТЕМ

5.1 Математичний маятник

Найбільш простим прикладом нелінійної системи є математичний маятник (рис. 5.1).

Розглянемо просту динамічну модель – маятник без тертя. В будь-якій точці A рух відбувається під дією тангенціальної складової сили тяжіння.

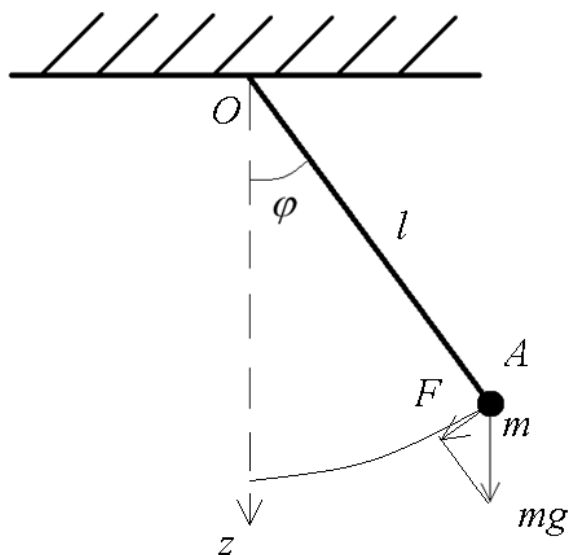


Рис. 5.1. Математичний маятник

$$F = -mg \sin \varphi,$$

де m – маса маятника; g – прискорення вільного падіння; φ – кут відхилення маятника від вертикалі; l – довжина маятника.

Швидкість руху точки по частині кола дорівнює:

$$v = S' = l\varphi'$$

$$a = v' = l\varphi''$$

$$ma = F \rightarrow ml\varphi'' = -mg \sin \varphi \quad (5.1)$$

$$\varphi'' + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Вважаючи $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, запишемо рівняння (5.1) в вигляді:

$$\varphi'' + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \quad (5.2)$$

Отримані рівняння є нелінійними і тільки для малих коливань, коли $\sin \varphi \approx \varphi$, $\varphi \approx 8,5^\circ \div 10^\circ$ (рис. 5.2), воно лінійне:

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (5.3)$$

з відомим розв'язком $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \psi)$ та періодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, у

якого кругова частота ω_0 не залежить від амплітуди коливань, тобто від кута відхилення φ .

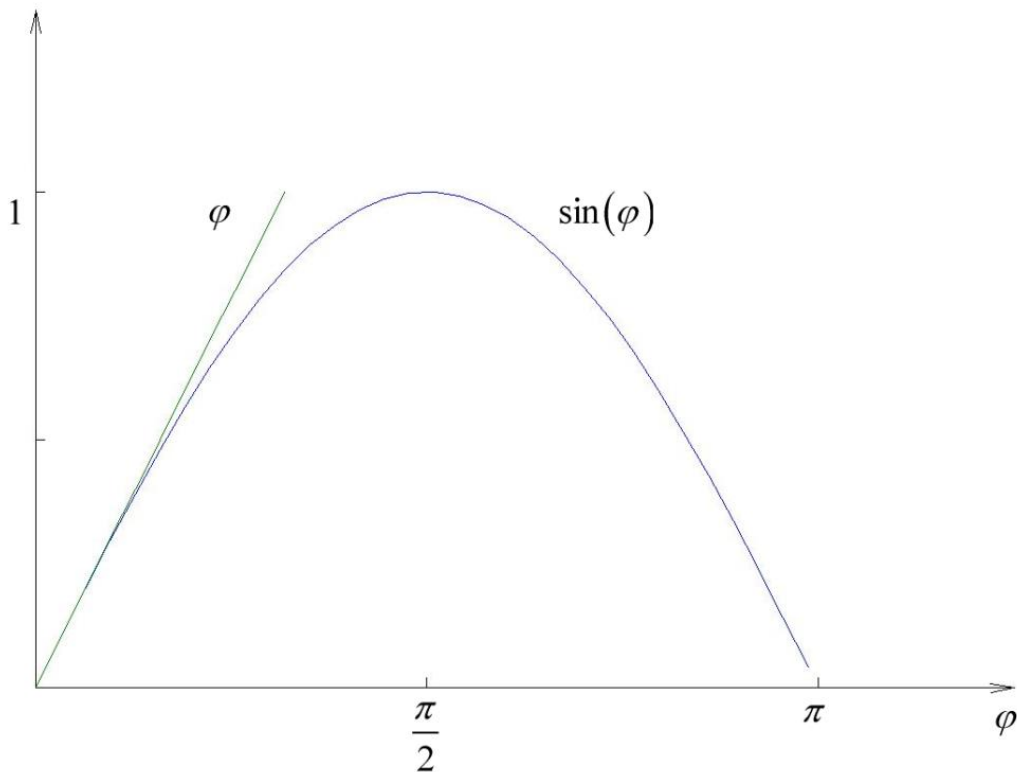


Рис. 5.2. Залежності $y = \sin \varphi$ і $y = \varphi$ від кута φ

Розв'язок (5.3) можна отримати декількома способами:

$$1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0; \quad \frac{dx}{dt} = p(x); \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = p \frac{dp}{dx}; \quad \frac{d}{dt} p(x) = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = p \frac{dp}{dx};$$

$$p \frac{dp}{dx} + \omega_0^2 x = 0; \quad p dp = -\omega_0^2 x dx;$$

$$\frac{p^2}{2} = -\omega_0^2 \cdot \frac{x^2}{2} + C; \quad p^2 = C_1^2 - \omega_0^2 x^2 = \omega_0^2 \left(\frac{C_1^2}{\omega_0^2} - x^2 \right);$$

$$p = \pm \omega_0 \sqrt{\frac{C_1^2}{\omega_0^2} - x^2}; \quad \frac{dx}{dt} = \pm \omega_0 \sqrt{\left(\frac{C_1}{\omega_0} \right)^2 - x^2};$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{C_1}{\omega_0} \right)^2 - x^2}} = \pm \omega_0 dt;$$

Інтеграл лівої частини: $\arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C$, де $a \equiv \left(\frac{C_1}{\omega_0} \right)^2$;

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C_2 = \pm \omega_0 t;$$

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} = \pm \omega_0 t - C_2;$$

$$\frac{x}{\sqrt{a}} = \sin(\pm \omega_0 t - C_2);$$

$$x = \sqrt{a} \sin(\pm \omega_0 t - C_2).$$

$$2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0;$$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm i \omega_0;$$

$$x = C_1 e^{i \omega_0 t} + C_2 e^{-i \omega_0 t}; \quad x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t;$$

$$x = C \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

Вважаючи $\varphi = 0$ при $t = 0$, отримаємо:

$$\varphi = a_0 \sin \omega t. \quad (5.4)$$

Розв'язок (5.4) тільки приблизно описує коливання маятника при малій амплітуді a_0 та відповідно малому φ .

Більш точний розв'язок можна отримати, якщо замість лінійного рівняння (5.3) скористатися рівнянням (5.2), в якому замінити $\sin \varphi$ першими двома членами його розвинення в ряд:

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6},$$

тоді

$$\varphi'' + \omega_0^2 \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) = 0. \quad (5.5)$$

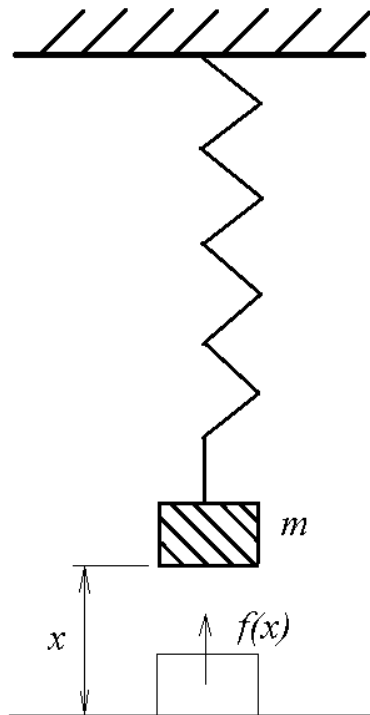


Рис. 5.3. Пружинний маятник

В даній системі не враховується дисипація енергії на подолання механічного тертя, тобто розглядається консервативна система.

Іншим прикладом консервативного осцилятора є тіло масою m , яке підвішене на пружину (рис. 5.3).

Нехтуємо силами тертя та вважаємо, що $f(x)$ виражає залежність зворотної сили від розтягу пружини x . Якщо $f(x)$ – це неперервна функція x , то диференціальне рівняння руху має наступний вигляд:

$$mx'' + f(x) = 0. \quad (5.6)$$

Вважаючи $f(x)$ непарною функцією, що не завжди виконується на практиці, виділимо декілька окремих випадків:

- якщо жорсткість пружини, що визначається як df/dx , може описуватись зростаючою функцією розтягу пружини x , тоді кажуть, що пружина – жорстка (рис. 5.4, а);
- якщо df/dx – спадаюча функція x , тоді пружину називають м'якою (рис. 5.4, б);
- якщо df/dx – стала функція, то пружину називають лінійною (рис. 5.4, в).

Наприклад, якщо залежність між зворотною силою та розтягом пружини визначається як:

$$f(x) = \beta x + \gamma x^3, \quad (5.7)$$

де $\beta > 0$, то пружина вважається жорсткою при $\gamma > 0$, м'якою при $\gamma < 0$ та лінійною при $\gamma = 0$.

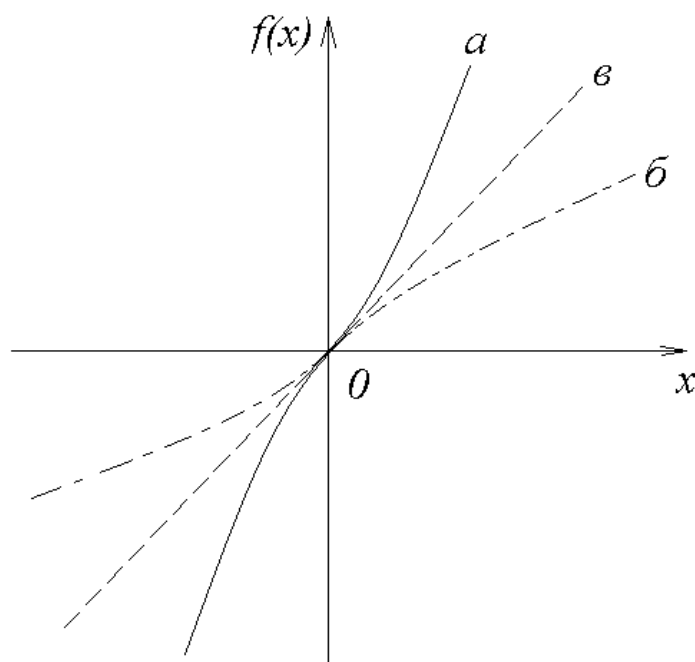


Рис. 5.4. Характеристики пружини:

а – жорстка пружина; б – м'яка пружина; в – лінійна пружина.

Потенціальна енергія пружини в залежності від її розтягу x виражається як:

$$E_p(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x (\beta x + \gamma x^3)dx = \beta \frac{x^2}{2} + \gamma \frac{x^4}{4}. \quad (5.7)$$

Її зміна від x при $\beta > 0$ показана на рис. 5.5.

Тоді рівняння (5.6) зводиться до наступного вигляду:

$$x'' + \omega_0^2 x + \mu x^3 = 0; \quad \omega_0^2 = \beta / m; \quad \mu = \frac{\gamma}{m} \quad (5.8)$$

Це більш загальний вигляд рівняння (5.5), і його можна досліджувати тими же методами.

Підстановка $x = x_1$, $x' = x_2$ приводить до так названої еквівалентної системи рівнянь:

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -\omega_0^2 x_1 - \mu x_1^3 \quad (5.9)$$

Електричний аналог осцилятора – коливальний контур, що складається з котушки індуктивності L і паралельно підключеного конденсатора C . Нехтуючи втратами, вважається, що опір контуру малий. Нехай q – заряд конденсатора в момент часу t , а V – різниця потенціалів на обкладинках конденсатора; q та V пов'язані співвідношенням $V = \frac{q}{C}$. Вважаючи конденсатор лінійним, тобто C – постійним коефіцієнтом, отримуємо диференціальне рівняння для визначення заряду:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (5.10)$$

Для нелінійного конденсатора відношення V та q , тобто $V = f(q)$, перестає бути лінійним і рівняння (5.10) замінюється більш загальним:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + f(q) = 0.$$

Якщо, наприклад, взяти

$$V = \beta q + \gamma q^3,$$

то отримаємо рівняння, подібне (5.8).

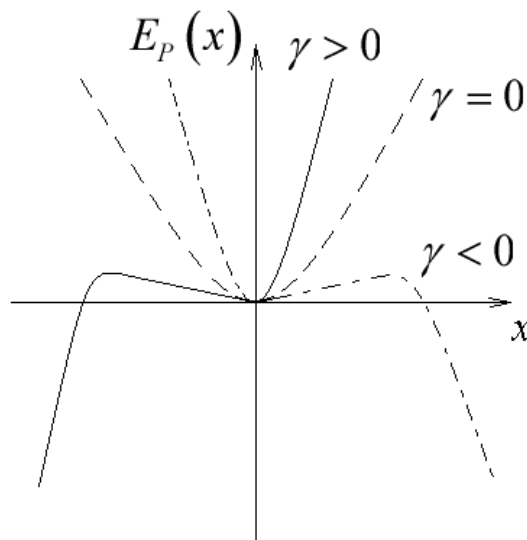


Рис. 5.5. Залежність потенціальної енергії пружини від її розтягу x

6 АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ

6.1 Вступ

Розв'язання диференціального рівняння в аналітичному вигляді, якщо тільки воно можливе, зазвичай дає великі переваги. У цьому випадку розв'язок виходить в загальному вигляді і немає необхідності вводити чисельні значення параметрів і початкових умов в процесі його визначення. Коли розв'язок знайдений, будь-які потрібні чисельні значення можуть бути підставлені і розв'язок може бути досліджений у всій області свого існування. Зважаючи на цю гнучкість часто є сенс витратити багато зусиль для того, щоб знайти розв'язок в аналітичній формі.

Щоб можна було отримати аналітичний розв'язок задачі, необхідно скласти математичний опис розглянутої фізичної системи. Змінні системи повинні бути пов'язані за допомогою відповідно виведених алгебраїчних або диференціальних рівнянь. Всі емпіричні залежності, задані у вигляді експериментальних кривих, слід виразити у вигляді аналітичних співвідношень. Очевидно, слід прагнути отримати якомога більш прості математичні вирази, що досягається за допомогою відповідної апроксимації. Виведені в результаті цієї роботи рівняння аналізуються з метою отримати рішення в загальному вигляді.

Деякі з методів, розроблених для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь, можуть бути успішно поширені і на розв'язання нелінійних. Потужний метод, часто вживаний для розв'язку лінійних рівнянь, полягає в тому, щоб визначити розв'язок у вигляді ряду за ступенями незалежної змінної. Наприклад, припускається, що рішенням

рівняння $f(x, dx/dt, d^2x/dt^2, t) = 0$ є ряд $x = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$. Цей ряд підставляється в рівняння, і коефіцієнти a_0, a_1, a_2, \dots визначаються так, щоб рівняння задовольнялося. Лінійні рівняння певного типу приводять до розв'язків у формі рядів, що мають досить важливе значення, щоб функції, що виражаються цими розвиненнями, отримали особливе найменування. Так, рівняння

$$\frac{dx}{dt} - kx = 0$$

має розв'язок

$$x = a_0 \left[1 + (kt) + \frac{(kt)^2}{2!} + \frac{(kt)^3}{3!} + \dots \right],$$

причому ряд в дужках визначає експоненціальну функцію, що позначається e^{kt} . Завдяки тому, що вона має широке застосування в ряді задач, чисельні значення експоненціальної функції обчислені і зведені в докладні таблиці. Аналогічно інші рівняння приводять до тригонометричних функцій як кругових, так і гіперболічних, значення яких також табульовані. Аналогічним чином виникають і інші математичні функції.

Метод визначення розв'язку у вигляді ряду за ступенями незалежної змінної може бути в деяких випадках поширений і на нелінійні рівняння. Зазвичай не вдається встановити відповідність отриманого таким способом ряду якої-небудь добре відомої і табульованої функції. Далі, отриманий ряд може збігатися повільно або не збігатися взагалі. Ряд в цьому випадку дає лише формальний розв'язок рівняння в тому розумінні, що він задовольняє рівнянню, будучи в нього підставленим. З іншого боку, такий формальний розв'язок може виявитися практично некорисним, якщо мова йде про отримання кількісних відомостей про систему.

Багато з практично важливих аналітичних методів засновані на тому, що починають з отримання розв'язку у вигляді комбінації добре відомих табульованих функцій. Встановлюється, що точний розв'язок, цілком ймовірно, неможливий, проте наближено задачу можна розв'язати з достатньою точністю. Хоча різні методи і не збігаються в подробицях, більшість їх в основному аналогічні і відповідають етапам, представленим на рис. 6.1. Початкове нелінійне рівняння спочатку розбивається на дві частини. Одну з них складає лінійне рівняння, досить просте, щоб отримати його точний розв'язок. Інша містить всі складові, які приводять до труднощів, і зазвичай включає в себе нелінійні, а іноді й деякі інші, члени вихідного рівняння. В результаті розв'язання лінійного рівняння виходить деяка функція, яку називають нульовим наближенням розв'язку, або породжуючим розв'язком. Цей породжуючий розв'язок яким-небудь способом використовується спільно з нелінійними членами вихідного

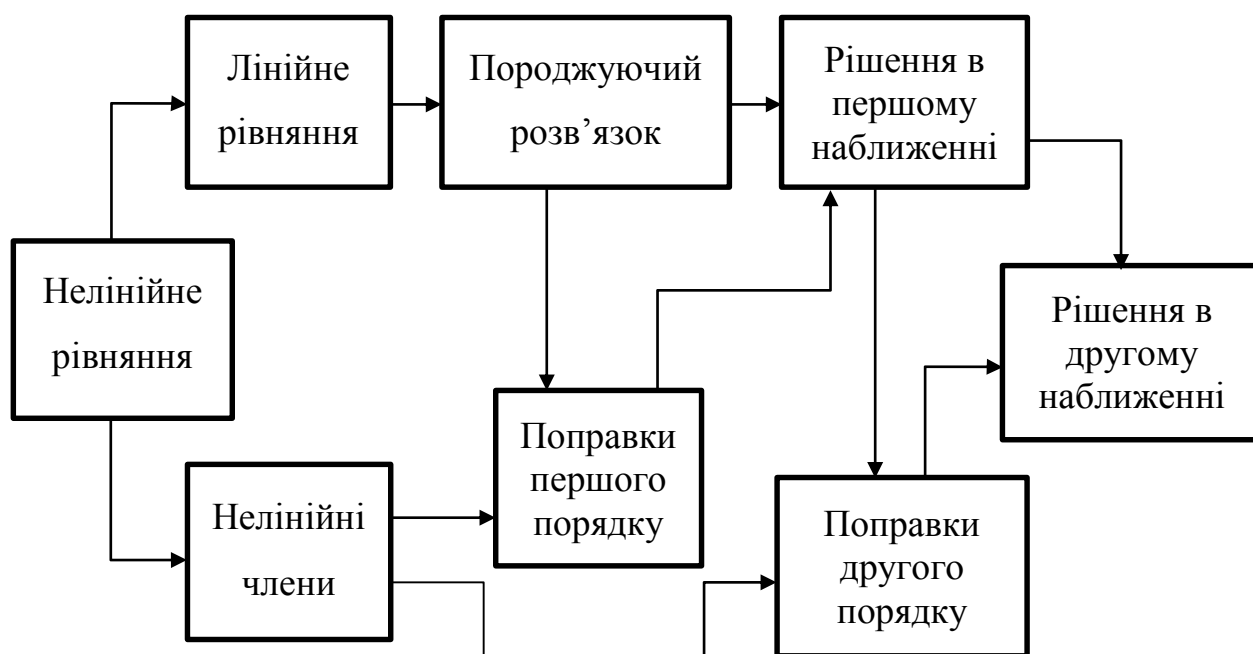


Рис. 6.1. Послідовність етапів, типова при визначенні наближеного розв'язку нелінійного рівняння

рівняння для того, щоб отримати поправочні члени першого порядку. Отримані поправочні члени об'єднуються потім з породжуючим розв'язком, що приводить до першого наближення розв'язку вихідного рівняння. Конкретний вигляд поправочних членів визначається характерними подробицями застосовуваного методу. У деяких випадках поправочні члени просто додаються до породжуючого розв'язку. В інших випадках вони змінюють амплітуду або фазу породжуючого розв'язку.

Якщо вплив нелінійності досить малий, одноразове застосування цього процесу, що приводить до першого наближення розв'язку, може дати досить точні результати. При більш значній нелінійності іноді можна досягти більшої точності, застосувавши той же метод вдруге, що приводить до другого наближення розв'язку. Подальші повторні застосування теоретично можливі, але на практиці зазвичай обчислювальні труднощі настільки зростають, що навіть незначне збільшення точності не може бути досягнуто цим шляхом. Для подібних методів істотною є невизначеність похибки одержуваного наближеного розв'язку. Далеко не завжди вдається просто оцінити цю похибку.

6.2 Метод збурень

Одним з найбільш поширених аналітичних методів є метод збурень. Цей метод можна застосовувати до рівнянь, в яких нелінійні члени пов'язані з малим параметром. Наближений розв'язок знаходиться в вигляді ряду, члени якого містять зростаючі степені малого параметра. Степені цього параметра є коефіцієнтами при функціях незалежної

змінної. Якщо величина параметра достатньо мала, потрібно лише кілька перших членів ряду, щоб отримати розв'язок високої точності.

Покажемо застосування методу збурень до системи з двох рівнянь першого порядку. Рівняння можуть бути представлені у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \psi_1(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} &= \psi_2(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

з початковими умовами при $t = t_0$:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= a \\ y(t_0) &= b \end{aligned}$$

Два таких рівняння можуть бути або безпосередньо складені для досліджуваної системи, або можуть бути результатом перетворення початкового рівняння другого порядку. Функції ψ_1 і ψ_2 , взагалі кажучи, нелінійні. Спочатку розбивають ці функції на дві частини:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, t) + \mu \varphi_1(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, t) + \mu \varphi_2(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Члени, що не викликають труднощів при розв'язку, записані під знаком функцій f_1 і f_2 . Нелінійні та інші члени, що створюють труднощі, об'єднані в функції φ_1 і φ_2 . З функціями φ_1 і φ_2 пов'язаний параметр μ . Цей параметр в ідеальному випадку повинен бути безрозмірним і його величина повинна бути малою. Розв'язок знаходиться у вигляді ряду по степеням μ , і чим менша величина μ , тим швидше цей ряд буде збігатися. На практиці зазвичай допускається, щоб параметр μ мав фізичну розмірність. Іноді підходящий параметр не може бути виділений у

вихідних рівняннях і його доводиться вводити штучно. З урахуванням цих умов розв'язок системи (5-1) часто може бути виражений рядами:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots \\ y &= y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Достатньо малі значення μ забезпечують настільки швидку збіжність, що вже два чи три члени цих рядів дають достатню точність. Якщо μ недостатньо мала, ряди можуть не сходитися зовсім і розв'язок виявиться практично некорисним. Розв'язок (6.3) зазвичай утворюється так, щоб при $\mu \rightarrow 0$ породжуючий розв'язок

$$\begin{aligned} x &= x_0(t); \\ y &= y_0(t); \end{aligned}$$

відповідав точному розв'язку лінійної системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, t); \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, t), \end{aligned}$$

яка задовольняє початковим умовам

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0(t_0) = a; \\ y(t_0) &= y_0(t_0) = b. \end{aligned}$$

Різні функції від t , що входять в розвинення (6.3): $x_0, x_1, x_2, \dots, y_0, y_1, y_2, \dots$ можуть бути визначені з розв'язків чисто лінійних рівнянь. Початкові умови використовуються для розрахунку довільних постійних, що з'являються на кожному етапі рішення. Спосіб визначення різних функцій, що фігурують в розв'язку, легше за все продемонструвати на конкретному прикладі.

Приклад 1. Розряд конденсатора на діод

Контур, зображений на рис. 6.2, містить конденсатор постійної ємності C , з'єднаний послідовно з діодом. Залежність між струмом діода i та напругою на його електродах e може бути виражена співвідношенням

$$i = ae + be^2,$$

де a і b – додатні постійні.

Ця залежність справедлива для струмів, що змінюються від нуля до деякого максимального значення. Графік її представлений на рис. 6.3. При $t = 0$ напруга на конденсаторі $e = E$. Знайти наступні зміни цієї напруги у функції часу t .

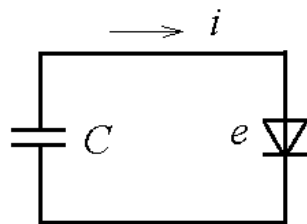


Рис. 6.2. Електричний контур до прикладу 1, що складається з конденсатора, який розряджається на діод з нелінійною характеристикою

Рівняння контуру має вигляд:

$$C \frac{de}{dt} + ae + be^2 = 0,$$

або

$$\frac{de}{dt} = -Ae - Be^2, \quad (6.4)$$

де $A = a / C$ і $B = b / C$.

Рівняння (6.4) – нелінійне диференціальне рівняння типу (6.1). Зручно ввести безрозмірний параметр μ множителем при нелінійному доданку. Тоді

$$\frac{de}{dt} = -Ae - \mu Be^2. \quad (6.5)$$

Для того, щоб отримати рівняння (6.4), значення μ звісно повинно дорівнювати одиниці. Допускаємо, що розв'язок має вигляд (6.3)

$$e = e_0(t) + \mu e_1(t) + \mu^2 e^2(t) + \dots \quad (6.6)$$

Підстановка цього розв'язку в рівняння (6.5) дає:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \dot{e}_0(t) + \mu \dot{e}_1(t) + \mu^2 \dot{e}_2(t); \\ e^2 &= e_0^2(t) + \mu e_1^2(t) + \mu^2 e_2^2(t) + 2e_0(t)\mu e_1(t) + 2e_0(t)\mu^2 e_2(t) + \\ &\quad + 2e_1(t)\mu^3 e_2(t) + \dots; \\ \dot{e}_0 + \mu \dot{e}_1 + \mu^2 \dot{e}_2 &= -Ae_0 - \mu Ae_1 - \mu^2 Ae_2 - \mu Be_0^2 - \mu^2 \cdot 2e_0 Be_1, \end{aligned} \quad (6.7)$$

причому точкою позначені похідні по t . Ми залишили лише доданки з 0, 1 і 2 степенями μ . Цей довільний вибір приводить до розв'язку, що містить поправочні члени другого порядку.

Будемо вимагати, щоб розв'язок був точним при $\mu=0$ і залишався на скільки це можливо більш близьким до точного розв'язку зі збільшенням μ від нуля. При цій умові коефіцієнти при будь-якій фіксованому степені μ в лівій і правій частинах повинні бути тотожно рівні. Це дає можливість зіставити систему рівнянь, прирівнюючи члени рівняння (6.7), що містять μ в однаковому степені.

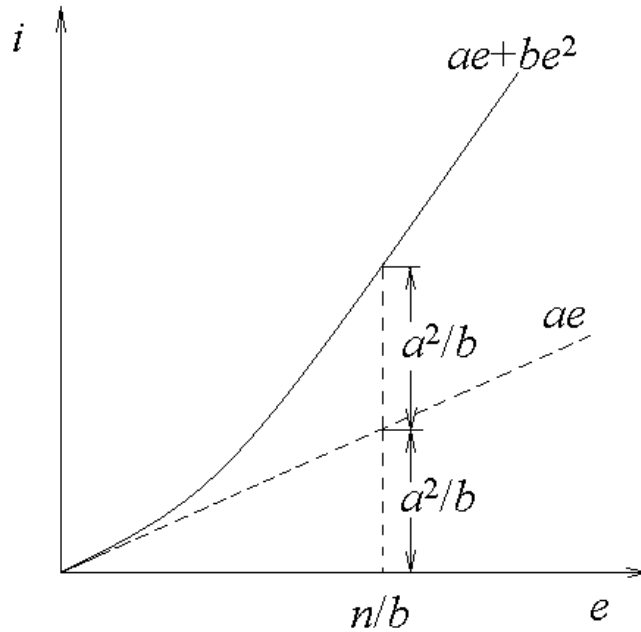


Рис. 6.3. Характеристика діода до прикладу 1

Породжуючий розв'язок визначається за допомогою членів (6.7), що містять μ в нульовому степені:

$$\dot{e}_0 = -Ae_0,$$

що відповідає рівнянню (6.5) з опущеним нелінійним доданком. Його розв'язок:

$$\frac{de_0}{dt} = -Ae_0; \rightarrow \frac{de_0}{e_0} = -Adt;$$

$$\ln e_0 = -At + k_0;$$

$$e_0 = k_0 e^{-At}.$$

Згідно початковим умовам $e_0 = E$ при $t = 0$ постійна k_0 визначається як $k_0 = E$. Отже, породжуючий розв'язок має вигляд

$$e_0(t) = Ee^{-At} \quad (6.8)$$

Поправочні члени першого порядку визначаються за допомогою лінійних по μ членів рівняння (6.7):

$$\dot{e}_1 = -Ae_1 - Be_0^2 = -Ae_1 - BE^2 e^{-2At},$$

куди підставлено тільки що знайдене значення $e_0(t)$. При визначенні $e_1(t)$ доводиться знаходити як спільний інтеграл однорідного, так і частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння і в результаті розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 + Ae_1 &= 0; e_1 = Ne^{-At}; \rightarrow \dot{e}_1 = \dot{N}e^{-At} - Ne^{-At}A; \\ \dot{N}e^{-At} - Ne^{-At}A &= -AE_1^{-At} + BE^2 e_1^{-2At}; \\ \dot{N} &= BE^2 e_1^{-At}; N = -BE^2 e_1^{-At} \frac{1}{A} + k_1; \\ e_1 &= k_1 e^{-At} + \frac{BE^2}{A} e^{-2At}.\end{aligned}\quad (6.9)$$

Оскільки початкові умови для повного розв'язку $e = E$ при $t = 0$ уже використанні при визначенні постійної k_0 , що входить в породжуючий розв'язок, початкові умови для поправки першого порядку – нульові; $e_1 = 0$ при $t = 0$. Отже, $k_1 = -BE^2 / A$.

Поправка першого порядку:

$$e_1 = \frac{BE^2}{A} [e^{-2At} - e^{-At}] \quad (6.10)$$

Члени рівняння (6.7), що визначають поправку другого порядку, тобто μ^2 :

$$\dot{e}_2 = -Ae_2 - 2Be_0e_1 = -Ae_2 - \frac{2B^2E^3}{A}(e^{-3At} - e^{-2At}),$$

куди підставленні раніше знайдені значення e_0 та e_1 . З урахуванням початкових умов $e_2 = 0$ при $t = 0$ отримуємо поправку другого порядку:

$$e_2 = \frac{B^2E^3}{A^2}(e^{-3At} - 2e^{-2At} + e^{-At}) \quad (6.11)$$

Друге наближення розв'язку будується шляхом підстановки (6.8) – (6.11) в розвинення (6.6). Після деяких перетворень, що дозволяють упорядкувати вираз, повний розв'язок приймає вигляд:

$$e = Ee^{-At} \left[1 + \frac{\mu BE}{A} (e^{-At} - 1) + \left(\frac{\mu BE}{A} \right)^2 (e^{-At} - 1)^2 \right] \quad (6.12)$$

Параметр μ був введений при переході від (6.4) до (6.5) абсолютно довільно. Для того, щоб розв'язок (6.12) відповідав рівнянню ланцюга (6.4), він повинен дорівнювати одиниці. Отже, в розв'язок (6.12) слід підставити $\mu = 1$. Величина $BE/A = bE/A$ безрозмірна, і в розв'язок входять її зростаючі степені. Очевидно, що вона повинна бути малою, у будь-якому разі менше одиниці, якщо ми хочемо, щоб ряд (6.6) сходився настільки швидко, щоб можна було обмежитися лише декількома першими його членами. Звідси, рішення (6.12) придатне лише за умови, що початкова напруга E невелика у порівнянні з відношенням a/b . Випадок, коли напруга на діоді рівна a/b , зображений на рис. 6.3. Половина загального струму $2a^2/b$ визначається лінійним доданком ae , а половина – квадратичним be^2 .

Слід відмітити, що коефіцієнт B входить як в початкове рівняння, так і в кінцевий розв'язок таким же чином, як параметр μ . Внаслідок цього часто записують загальний вигляд розвинення розв'язку безпосередньо по степеням B , а не по степеням μ , як це було зроблено в (6.6). Однак, оскільки B – величина розмірна, це може призвести до труднощів у визначенні того, що слід розуміти під малістю B , достатньої для швидкої збіжності ряду. В нашому випадку, звичайно, потрібно, щоб значення B було малим відносно співвідношення A/E .

Рівняння (6.4) для контуру, який розглядається, відноситься до числа небагатьох простих рівнянь, що допускають точний розв'язок. Його можна розв'язати як рівняння Бернуллі:

$$\frac{de}{dt} = -Ae - Be^2;$$

Рівняння Бернуллі:

$$\frac{dy}{dx} + f_1(x)y = f_0(x)y^n.$$

Заміна змінної:

$$z = y^{t-n};$$

$$n = 2: z = y^{t-2} = y^{-1} \rightarrow z = \frac{1}{e};$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-2)Az = (1-2)(-B) \rightarrow \frac{dz}{dx} - Az = B;$$

$$\frac{dz}{dt} = Az; \quad \frac{dz}{z} = A dt; \quad \ln z = At + C \rightarrow z = C_1 e^{At};$$

$$AC_1 e^{At} + \dot{C}_1 e^{At} - AC_1 e^{At} = B;$$

$$\dot{C}_1 e^{At} = B; \quad \frac{dC_1}{dt} = B e^{-At}; \quad C_1 = -\frac{B}{A} e^{-At} + C_2;$$

$$z = C_2 e^{At} - \frac{B}{A} e^{-At} e^{At} = C_2 e^{At} - \frac{B}{A};$$

$$e^{-1} = C_2 e^{At} - \frac{B}{A} \rightarrow e = \frac{1}{C_2 e^{At} - \frac{B}{A}};$$

$$t = 0; e = E: E = \frac{1}{C_2 - \frac{B}{A}} \rightarrow EC_2 = 1 + \frac{EB}{A};$$

$$C_2 = \frac{1 + \frac{EB}{A}}{E} = \frac{1}{E} + \frac{B}{A};$$

$$e = \frac{1}{\left(\frac{1}{E} + \frac{B}{A}\right)e^{At} - \frac{B}{A}} = \frac{1}{\frac{B}{A}(e^{At} - 1) + \frac{1}{E}e^{At}};$$

$$e = \frac{Ee^{-At}}{1 + \frac{BE}{A} - \frac{BE}{A}e^{-At}} = \frac{Ee^{-At}}{1 - \frac{BE}{A}(e^{-At} - 1)};$$

Отже, точний розв'язок:

$$e = \frac{Ee^{-At}}{1 - (BE/A)(e^{-At} - 1)}. \quad (6.13)$$

Якщо відношення одиниці до знаменника цього виразу розвинути в біноміальний тип, то сума перших трьох членів в точності співпадає з виразом, що знаходиться в дужках у формулі (6.12). В цьому прикладі метод збурень дає той же результат, який би ми отримали, якщо б розвинули в ряд по BE/A точний розв'язок і обмежилися трьома членами цього розвинення.

Як точний, так і приблизний розв'язок, що виражає напругу на конденсаторі у функції часу, зменшується і з необмеженим ростом часу прямує до нуля. Однак вона зменшується не експоненціально. Для напруг, не набагато менших, ніж E , спад проходить швидше, ніж по простій експоненті. Для малих напруг спад в основному слідує простій експоненціальній залежності. Нелінійний діод можна порівняти з опором, величина якого менша при великих значеннях напруги, ніж при малих.

На рис. 6.4 представлені три компоненти: e_0 , e_1 і e_2 розв'язку (6.12), а також їх сума для випадку $\frac{BE}{A} = \frac{1}{2}$. В межах точності побудови наближений розв'язок збігається з точним.

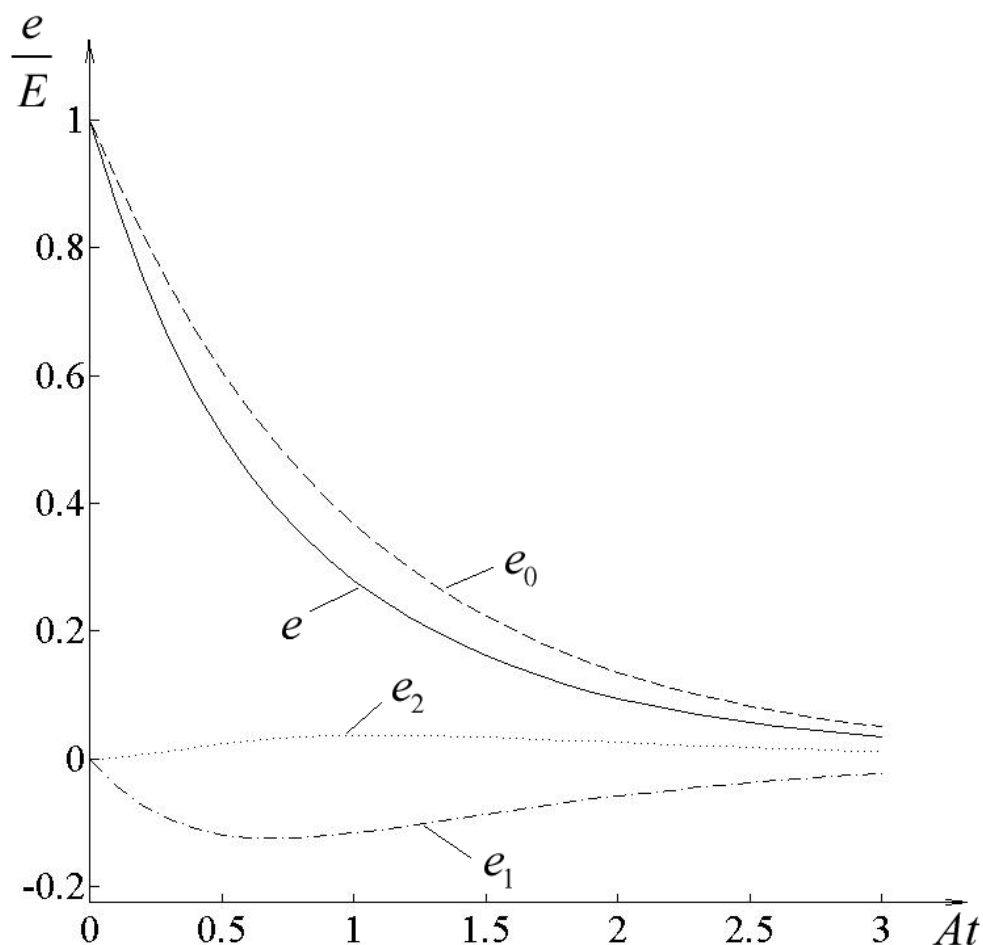


Рис. 6.4 Точний розв'язок прикладу 1 і три складові наближеного розв'язку

для випадку $\frac{BE}{A} = \frac{1}{2}$.

Приклад 2. Бомбометання з малих висот з урахуванням опору повітря

Під час руху снаряда з помірною швидкістю сила опору повітря приблизно пропорційна квадрату цієї швидкості і спрямована їй назустріч. Таким чином, рівняння руху снаряду масою M в системі координат, зображеній на рис. 6.5, при розгляді сил, спрямованих уздовж траєкторії і нормально до неї, можуть бути записані у вигляді:

- вздовж траєкторії $Mg \sin \theta - kv^2 = M\dot{v}$;

- нормально до траєкторії $Mg \cos \theta = Mv\ddot{\theta}$.

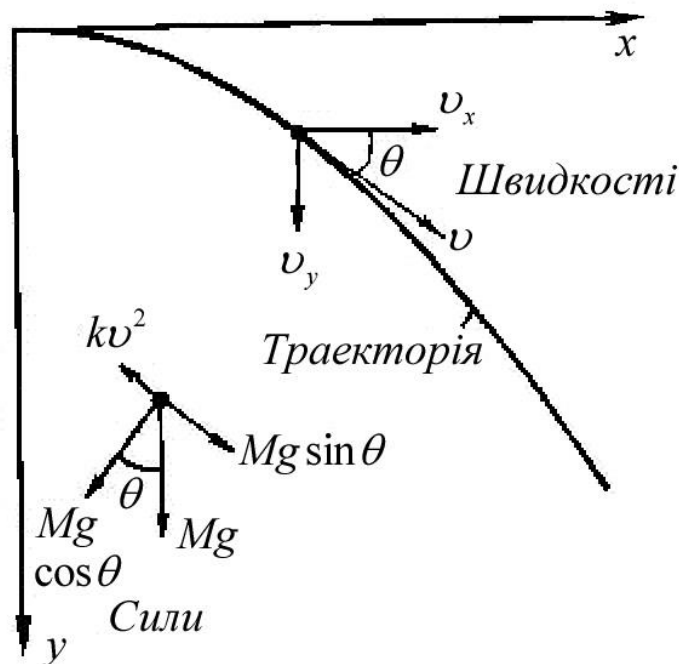


Рис. 6.5 Траєкторія і сили, що діють на бомбу в прикладі 2

Змінивши порядок запису рівнянь системи і спростивши їх, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{g}{v} \cos \theta \\ \dot{v} &= g \sin \theta - hv^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

де k – постійна, що визначає вплив опору повітря; $h = k / M$; v – швидкість руху по траєкторії, а θ – кут, під яким направлений вектор швидкості, що відлічується вниз від горизонтальної осі. Система складається з двох нелінійних рівнянь першого порядку. Якщо снаряд падає протягом довгого часу, гранично $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ рад, $\dot{v} \rightarrow 0$ і кінцева швидкість $v_k = (g / h)^{1/2} = (gM / k)^{1/2}$. Якщо величина кута θ обмежена

досить малими значеннями, наближений розв'язок системи може бути отриманий методом збурень.

Розглянемо траєкторію бомби, скинутої в момент $t=0$ з літака, що летить на малій висоті зі швидкістю $v=V$, під кутом $\theta=0$.

Якщо літак летить близько від поверхні землі, час падіння бомби малий і кут θ вздовж всієї траєкторії залишається малим. Таким чином, метод збурень може бути застосований до задачі бомбометання з малих висот. При дослідженні бомбометання з великої висоти цей метод не можна було б застосувати безпосередньо.

Для малих θ можна використовувати наближені вирази тригонометричних функцій

$$\begin{aligned}\cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2}; \\ \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{6};\end{aligned}$$

і записати систему (6.13) у вигляді

$$\left. \begin{aligned}\dot{\theta} &= \mu \left(\frac{g}{v} - \frac{g\theta^2}{2v} \right) \\ \dot{v} &= g\theta - \mu \left(\frac{g\theta^2}{6} + hv^2 \right)\end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

де перед кожним нелінійним членом введений чисельний параметр μ .

Спробуємо знайти розв'язок у вигляді степеневого ряду по μ :

$$\left. \begin{aligned}\theta &= \theta_0(t) + \mu\theta_1(t) + \dots \\ v &= v_0(t) + \mu v_1(t) + \dots\end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

в якому залишені лише поправочні члени першого порядку. Підстановка в рівняння (6.15) дає:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_0 + \mu \dot{\theta}_1 &= \mu \left(\frac{g}{\nu_0} - \frac{g\theta_0^2}{2\nu_0} \right) \\ \dot{\nu}_0 + \mu \dot{\nu}_1 &= g\theta_0 + \mu \left(g\theta_1 - \frac{g\theta_0^2}{6} - h\nu_0^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

де утримані лише доданки з нульовим і першим степенями μ .

Породжуючий розв'язок визначається членами, які містять μ в нульовому степені. Рівняння для θ_0 просто $\dot{\theta}_0 = 0$ або $\theta_0 = C_1$. Початкові умови: $\theta_0 = 0$ при $t = 0$, звідки $C_1 = 0$ і, таким чином, породжуючий розв'язок $\theta_0 = 0$. Рівняння для ν_0 має вигляд $\dot{\nu}_0 = g\theta_0 = 0$, оскільки визначено, що $\theta_0 = 0$. Його розв'язок: $\nu_0 = C_2$. Початкові умови: $\nu_0 = V$ при $t = 0$, звідки $C_2 = V$ і породжуючий розв'язок $\nu_0 = V$. Повний породжуючий розв'язок:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= 0 \\ \nu_0 &= V \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Поправки першого порядку визначаються за допомогою членів, лінійних по μ . У цьому випадку θ_1 , визначається рівнянням $\dot{\theta}_1 = g/\nu_0 - g\theta_0^2/2\nu_0 = g/V$. Його розв'язком є $\theta_1 = gt/V + C_3$ і оскільки $\theta_1 = 0$ при $t = 0$, константа $C_3 = 0$. Аналогічно для ν_1 рівняння має вигляд $\dot{\nu}_1 = g^2t/V - hV^2$. Його розв'язком є $\nu_1 = g^2t^2/2V - hV^2t + C_1$ і, оскільки $\nu_1 = 0$ при $t = 0$, константа $C_1 = 0$. Остаточні поправки першого порядку:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{gt}{V} \\ \nu_1 &= \frac{g^2t^2}{2V} - hV^2t \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Перше наближення розв'язку є поєднанням (6.18) і (6.19):

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \mu \frac{gt}{V} \\ v &= V + \mu \left(\frac{g^2 t^2}{2V} - hV^2 t \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

причому для того щоб задовольнити вихідну систему, слід прирівняти в ньому $\mu=1$.

Отримані результати частково можна перевірити, порівнявши їх з точним розв'язком, отриманим за відсутності опору повітря, тобто при $k=0$ і $h=0$. У цьому випадку при розглянутих нами початкових умовах горизонтальна і вертикальна складова швидкості дорівнюють відповідно $v_x = V$ і $v_y = gt$. Швидкість руху по траєкторії

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = [V^2 + (gt)^2]^{1/2}.$$

Якщо t настільки мале, що $gt \ll V$, то наближено

$$v = V \left[1 + \frac{1}{2} (gt/V)^2 \right],$$

що відповідає значенню v по (6.20) при $h=0$. Аналогічно кут визначається рівністю $\tan \theta = v_y / v_x = gt / V$ і, якщо знову $gt \ll V$, то кут θ досить малий, так, що $\tan \theta \approx \theta$ і результат збігається зі значенням θ в (6.20).

Слід, звичайно, пам'ятати, що розв'язок (6.20) лише наближений і стає все менш точним по мірі зростання t і θ . Вплив опору повітря проявляється в зменшенні швидкості, яке приводить до того, що бомба вражає земну поверхню, пройшовши меншу горизонтальну відстань від точки скидання.

6.3 Секулярні члени

В деяких випадках застосування методу збурень ускладнюється обставиною, яку не одразу вдається виявити. Це поява так званих вікових членів при дослідженні рівняння, розв'язком якого є коливальний процес. Віковими членами називаються коливальні члени, амплітуда яких з плином часу нескінченно зростає. Оскільки в фізичній системі з обмеженим енергетичним рівнем амплітуда коливань ні при яких умовах не може зростати нескінченно, дослідження слід проводити так, щоб виключити вікові члени по мірі їх виявлення.

Вікові члени виникають, наприклад, при дослідженні системи, період коливань якої залежить від її амплітуди. Такою є механічна система, що складається з тіла постійної маси, укріпленого за допомогою нелінійної пружини.

Наближені розв'язки рівняння маятника. Рівняння руху маятника з пружиною $m\ddot{x} + f(x) = 0$.

Зворотна сила пружини:

$$f(x) = \beta x + \gamma x^2;$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{\beta}{m}; \quad \mu = \frac{\gamma}{m}.$$

Припустимо, що рівняння

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = 0 \tag{6.21}$$

слабо нелінійне, тобто параметр μ – мала величина.

Виходячи з евристичного припущення Пуассона, спробуємо перш за все знайти розв'язок рівняння (6.21) у вигляді ряду по малому параметру μ , наприклад

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^m x_m(t) + \dots, \quad (6.22)$$

де $x_0(t)$, $x_1(t)$, ..., $x_m(t)$ – шукані функції.

Підставляючи вираз (6.22) в рівняння (6.21) і прирівнюючи члени з однаковими степенями μ , можна отримати систему рекурентних рівнянь для визначення шуканих функцій.

Якщо, наприклад, обмежитися членами з нульовим і першим степенями відносно μ , то отримаємо:

$$\ddot{x}_0(t) + \mu \ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_0(t) + \omega_0^2 \mu x_1(t) + \mu x_0^3(t) = 0$$

$$(x_0 + \mu x_1)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \mu x_1 + 3x_0 (\mu x_1)^2 + (\mu x_1)^3 \rightarrow x_0^3(t)$$

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \mu [\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^3] + O(\mu) = 0,$$

звідки випливає

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \quad (6.23)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3. \quad (6.24)$$

Розв'язок для (6.23) відомий:

$$x_0 = a_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Після підстановки його в (6.23), враховуючи, що

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha;$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4} [3\sin \alpha - \sin 3\alpha];$$

$$a_0^3 \sin^3(\omega t + \varphi) = a_0^3 \left\{ \frac{1}{4} [3\sin(\omega t + \varphi) - \sin 3(\omega t + \varphi)] \right\};$$

знаходимо

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -[a_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)]^3 = \\ &= -\frac{3}{4} a_0^3 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{4} a_0^3 \sin 3(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Розв'язок рівняння (6.25) має вигляд:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0;$$

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0; \alpha_{1,2} = \pm i\omega_0; x_{10} = C_{10}e^{-i\omega_0 t} + C_2 e^{i\omega_0 t};$$

$$x_{10} = a \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

$$x_{10} = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + B \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

Частинний розв'язок:

$$x_1 = t [C \sin(\omega_0 t + \varphi) + D \cos(\omega_0 t + \varphi)];$$

$$\dot{x}_1 = C \sin(\omega_0 t + \varphi) + D \cos(\omega_0 t + \varphi) + t C \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) - t D \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \omega_0 C \cos(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 D \sin(\omega_0 t + \varphi) + C \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ &- t C \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) - D \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - t D \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= 2\omega_0 C \cos(\omega_0 t + \varphi) - 2\omega_0 D \sin(\omega_0 t + \varphi) - \\ &- t \omega_0^2 [C \sin(\omega_0 t + \varphi) + D \cos(\omega_0 t + \varphi)]; \end{aligned}$$

$$2\omega_0 C \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0;$$

$$-2\omega_0 D \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{3}{4} a_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

$$D = \frac{3}{4} \frac{a_0^2}{2\omega_0} = \frac{3}{8} \frac{a_0^2}{\omega_0}; C = 0;$$

$$x_1 = t \frac{3}{8} \frac{a_0^2}{\omega_0} \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{3}{4} a_0^3 \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{4} a_0^3 \sin 3(\omega_0 t + \varphi);$$

Знайдемо другий частинний розв'язок:

$$x_1 = N \sin 3(\omega_0 t + \varphi) + M \cos 3(\omega_0 t + \varphi);$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= N \cos 3(\omega_0 t + \varphi) \cdot 3\omega_0 - M \sin 3(\omega_0 t + \varphi) \cdot 3\omega_0; \\
\ddot{x}_1 &= -3\omega_0 N \sin 3(\omega_0 t + \varphi) \cdot 3\omega_0 - 3\omega_0 M \cos 3(\omega_0 t + \varphi) \cdot 3\omega_0 = \\
&= -9\omega_0^2 N \sin 3(\omega_0 t + \varphi) - 9\omega_0^2 M \cos 3(\omega_0 t + \varphi); \\
&\quad -9\omega_0^2 N \sin 3(\omega_0 t + \varphi) - 9\omega_0^2 M \cos 3(\omega_0 t + \varphi) + \\
&\quad + \omega_0^2 [N \sin 3(\omega_0 t + \varphi) + M \cos 3(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{1}{4} a^3 \sin 3(\omega_0 t + \varphi); \\
\sin 3(\omega_0 t + \varphi) [-8\omega_0^2 N] - \cos 3(\omega_0 t + \varphi) [-8\omega_0^2 M] &= \frac{1}{4} a^3 \sin 3(\omega_0 t + \varphi); \\
M = 0; N &= -\frac{1}{4} a^3 \frac{1}{8\omega_0^2} = -\frac{a_0^3}{32\omega_0^2};
\end{aligned}$$

Таким чином другий частинний розв'язок:

$$x_1 = -\frac{a_0^3}{32\omega_0^2} \sin 3(\omega_0 t + \varphi).$$

Розв'язок рівняння (6.25):

$$\begin{aligned}
x(t) &= a_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \mu \left[\frac{3a_0^3 t}{8\omega_0} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{a_0^3}{32\omega_0} \sin 3(\omega_0 t + \varphi) \right]. \\
x_1 &= \frac{3a_0^3 t}{8\omega_0} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{a_0^3}{32\omega_0} \sin 3(\omega_0 t + \varphi).
\end{aligned}$$

У підсумку отримуємо:

$$\begin{aligned}
x(t) &= a_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \\
&+ \mu \left[\frac{3a_0^3 t}{8\omega_0} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{a_0^3}{32\omega_0} \sin 3(\omega_0 t + \varphi) \right] + O(\mu^2). \quad (6.26)
\end{aligned}$$

При застосуванні методу малого параметра з'являються серйозні труднощі: другий член в правій частині виразу (6.26) при $t \rightarrow \infty$ необмежено зростає, тоді як точний розв'язок є обмеженим при будь-якому t . Такий член називається секулярним членом. Причина, з якої не

можна знайти обмежений розв'язок полягає в тому, що розглядається лише мале число членів розвинення.

Приклад з аналогічною особливістю описаний Боголюбовим і Митропольським, а саме розвинення в ряд функції $\sin(\omega_0 + \mu)t$:

$$\sin(\omega_0 + \mu)t = \sin \omega_0 t + \mu t \cos \omega_0 t - \frac{\mu^2 t^2}{2!} \sin \omega_0 t - \frac{\mu^3 t^3}{3!} \cos \omega_0 t + \dots,$$

де μ – малий параметр. Ліва частина цього виразу представляє собою періодичну функцію, обмежену при будь-якому t , для правої ж частини – це не очевидно. В цьому полягає реальна складність цього методу, так як він не проясняє важливих аспектів розв'язку, а доказ збіжності останнього в ряді випадків може виявитися утрудненим.

Породжуючий розв'язок в цьому випадку має вигляд $\cos \omega_0 t$, де ω_0 – кругова частота системи, що містить одні лише лінійні члени. Дія нелінійних членів приводить до зміни частоти на нове значення $\omega_0 + \omega_1$, так що виправлений розв'язок набуває вигляду $\cos(\omega_0 + \omega_1)t$. В такій формі методу збурень, яку ми розглядали досі, поправочні члени вводяться в вигляді додаткових доданків степеневому ряду. Таким чином, метод збурень привів би до виправленого розв'язку у вигляді різниці двох знакозмінних рядів:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 + \omega_1)t &= \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_0 t - \sin \omega_1 t \cdot \sin \omega_0 t = \\ &= \left(1 - \frac{\omega_1^2 t^2}{2} + \frac{\omega_1^4 t^4}{24} - \dots\right) \cos \omega_0 t - \left(\omega_1 t - \frac{\omega_1^3 t^3}{6} + \frac{\omega_1^5 t^5}{120} - \dots\right) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Появи вікових членів можна уникнути, якщо з самого початку встановити можливість зміни частоти в залежності від амплітуди. Для цього в доповнення до заміни x та y їх розвиненнями згідно (6.3) слід представити ω у вигляді ряду:

$$\omega = \omega_0 + \mu b_1(A) + \mu^2 b_2(A) + \dots, \quad (6.27)$$

де ω – основна частота коливань реальної нелінійної системи; ω_0 – кутова частота ліанеризованої системи при $\mu=0$, а $b_1(A)$, $b_2(A)$, ... – функції амплітуди, які слід визначати так, щоб вікові члени виключались по мірі їх появи.

Приклад 3. Рух тіла, яке утримується нелінійною пружиною

Знайти наближений розв’язок задачі про рух тіла постійної маси, яке утримується за допомогою нелінійної пружини того же типу, що і в попередніх прикладах, з початковими умовами $x = A_0$ і $\dot{x} = 0$ при $t = 0$.

Рівняння руху системи можна записати в вигляді

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + h x^2 = 0, \quad (6.28)$$

де ω_0 – реальна кругова частота системи у випадку відсутності нелінійних доданків, а h – постійна, що визначає міру впливу не лінійності; коефіцієнт h додатний у випадку жорсткої і від’ємний у випадку м’якої пружини.

Якщо h достатньо малий, то наближений розв’язок можна знайти методом збурень. В дійсності h – величина розмірна, і не ясно, якою є та величина, по відношенню до якої значення h повинно бути малим. В попередніх прикладах безрозмірний параметр μ штучно вводився множником при нелінійних членах вихідного рівняння і розв’язок шукався в формі ряду по степеням μ . Тут так же зручно застосувати коефіцієнт h в якості параметра, по якому будується розвинення в ряд розв’язку, що і буде використано нами. Далі, рівняння (6.28) – другого порядку і його можна було б замінити системою з двох рівнянь першого порядку. Однак

тут в тій же мірі зручно працювати з рівнянням другого порядку, що ми і зробимо.

Розв'язок рівняння (6.28) шукаємо у вигляді

$$x = x_0(t) + hx_1(t) + h^2x_2(t), \quad (6.29)$$

де h – параметр розвинення, причому утримуємо лише члени, що містять h в степені, меншому, ніж 3.

Далі, оскільки відомо, що розв'язок носить коливальний характер, є підстава припустити, що в даній нелінійній системі основна частота коливань буде змінюватися в залежності від їх амплітуди. Тоді для виключення вікових членів по мірі їх появи слід взяти ω у вигляді

$$\omega = \omega_0 + hb_1(A) + h^2b_2(A), \quad (6.30)$$

де A – амплітуда, а ω – реальна основна частота коливань.

Практично, оскільки лише ω_0^2 , а не ω_0 фігурує в рівнянні (6.28), зручніше писати

$$\omega^2 = \omega_0^2 + hb_1(A) + h^2b_2(A). \quad (6.31)$$

Функції b_1 і b_2 в формулі (6.30), звісно, відрізняються від функцій b_1 і b_2 в формулі (6.31).

Рівняння (6.31) можна переписати у вигляді

$$\omega^2 = \omega_0^2 - hb_1(A) - h^2b_2(A)$$

і сумісно з (6.29) поставити в вихідне рівняння (6.28), що дає:

$$x = x_0(t) + hx_1(t) + h^2x_2(t) = x_0 + hx_1 + h^2x_2;$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 - hb_1(A) - h^2b_2(A) = \omega^2 - hb_1 - h^2b_2;$$

$$x^3 = x_0^3 + h^3x_1^3 + h^6x_2^3 + 3x_0^2hx_1 + 3x_0^2h^2x_2 + 3h^2x_1h^2x_2;$$

$$\ddot{x}_0 + h\ddot{x}_1 + h^2\ddot{x}_2 + \omega_0^2x_0 + \omega_0^2hx_1 + \omega_0^2h^2x_2 + hx_0^3 + 3h^2x_0^2x_1 + \dots = 0;$$

$$\ddot{x}_0 + h\ddot{x}_1 + h^2\ddot{x}_2 + x_0\omega^2 - hb_1x_0 - h^2b_2x_0 + h^2x_2\omega^2 - h^2b_1x_0 + hx_0^3 + 3x_0^2x_1h^2 = 0;$$

$$\ddot{x}_0 + h\ddot{x}_1 + h^2\ddot{x}_2 + \omega^2 x_0 + h\omega^2 x_1 + h^2\omega^2 x_2 - hb_1x_0 - h^2b_1x_1 - \\ - h^2b_2x_0 + hx_0^3 + h^23x_0^2x_1 = 0,$$

причому залишені лише члени, необхідні для отримання другого наближення.

Породжуючий розв'язок визначається з рівняння

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0,$$

розв'язок якого:

$$x_0 = P_0 \cos \omega t + Q_0 \sin \omega t;$$

$$\dot{x}_0 = -\omega P_0 \sin \omega t + \omega Q_0 \cos \omega t.$$

Враховуючи початкові умови $x_0 = A_0$; $\dot{x}_0 = 0$ при $t = 0$, що відповідає лінійному випадку, і тому його частота просто дорівнює частоті лінійної системи.

Поправочні члени першого порядку визначаються з рівняння

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = b_1 x_0 - x_0^3 = \left(b_1 A_0 - \frac{3A_0^3}{4} \right) \cos \omega t - \frac{A_0^3}{4} \cos 3\omega t,$$

в якому підставлене значення x_0 і використана тотожність

$$\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримаємо:

$$x_1 = P_1 \cos \omega t + Q_1 \sin \omega t + \frac{\omega t}{2} \left(b_1 A_0 - \frac{3A_0^3}{4} \right) \sin \omega t + \frac{A_0^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t.$$

Перші два доданки виражають загальний інтеграл однорідного рівняння. Третій доданок є частинним розв'язком, що викликається силою збурення тієї ж частоти, що і власна частота системи. Це відповідає умовам резонансу в консервативній системі, і тому цей доданок містить множник t . Це, звісно, і є віковий член, який слід виключити. Четвертий доданок в

виразі для x_1 – частинний розв’язок, що викликається збуренням з частотою 3ω .

Для виключення вікового члена будемо вимагати, щоб коефіцієнт при ньому виявився рівним нулю, тобто щоб $b_1 A_0 - 3A_0^3 / 4 = 0$. Ця вимога задовольняється чи при $A_0 = 0$, чи при $b_1 = 3A_0^2 / 4$. Перша умова тривіальна, а друга представляє інтерес і дозволяє визначити функцію $b_1(A)$ в рівнянні (6.30). Початкові умови для x_1 – нульові, тобто $x_1 = 0$ і $\dot{x}_1 = 0$ при $t = 0$. Їм відповідають постійні $P_1 = -A_0^3 / 32\omega^2$ і $Q_1 = 0$, так що поправка першого порядку визначається виразом

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\left(\frac{A_0^3}{32\omega^2}\right)(\cos \omega t - \cos 3\omega t) \\ b_1 &= \frac{3A_0^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Поправочні члени другого порядку знаходимо з рівняння

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= b_1 x_1 + b_2 x_0 - 3x_0^2 x_1 = \\ &= \frac{3A_0^2}{4} \left(-\frac{A_0^3}{32\omega^2}\right)(\cos \omega t - \cos 3\omega t) + b_2 A_0 \cos \omega t - \\ &- 3(A_0^2 \cos^2 \omega t) \left(-\frac{A_0^3}{32\omega^2}\right)(\cos \omega t - \cos 3\omega t). \end{aligned}$$

Праву частину можна спростити за допомогою тотожностей:

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta; \\ \cos^3 \theta \cos 3\theta &= \frac{1}{4} \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 3\theta + \frac{1}{4} \cos 5\theta. \end{aligned}$$

Функція b_2 визначається в процесі виключення вікового члену як $b_2 = -3A_0^4 / 128\omega^2$. Після цього з урахуванням початкових умов $x_2 = 0$ і $\dot{x}_2 = 0$ при $t = 0$ поправка другого порядку може бути записана в вигляді

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -\left(\frac{A_0^5}{1024\omega^4}\right)(\cos \omega t - \cos 5\omega t) \\ b_2 &= -\frac{3A_0^4}{128\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

Друге наближення розв'язку внаслідок цього має вигляд

$$\left. \begin{aligned} x &= A_0 \cos \omega t - \frac{hA_0^3}{32\omega^2}(\cos \omega t - \cos 3\omega t) - \frac{h^2 A_0^5}{1024\omega^4}(\cos \omega t - \cos 5\omega t) \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + \frac{h \cdot 3A_0^2}{4} - \frac{h^2 \cdot 3A_0^4}{128\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Нелінійність позначається в спотворенні форми коливань внаслідок появи вищих гармонік і в тому, що основна частота коливань змінюється.

Безрозмірна величина $hA_0^2 / 32\omega^2$ входить лінійно в вираз x_1 і її квадрат фігурує в виразі x_2 . Очевидно, що для забезпечення заданого ступеня точності розв'язку, ця величина повинна бути відповідно малою у порівнянні з одиницею. Таким чином, для початкового запису розв'язку у формі (6.29) необхідно, щоб $h \ll 32\omega^2 / A_0^2$.

В першому наближенні основна частота коливань системи визначається як $\omega^2 = \omega_0^2 + h \cdot 3A_0^2 / 4$, чи наближено $\omega = \omega_0 \left(1 + 3hA_0^2 / 8\omega_0^2\right)$. Якщо період коливань системи $T = 2\pi / \omega$, а період лінійного наближення $T_0 = 2\pi / \omega_0$, то відношення періодів

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{3hA_0^2}{8\omega_0^2}}.$$

Це відношення можна порівняти з відповідними відношеннями, знайденими при точному аналізі. Після деяких перетворень можна показати, що в даному наближенні значення відношення періодів, отримане методом збурень, співпадає з точними значеннями. Для жорсткої пружини параметр h додатній, і період зменшується з ростом A_0 . Це є наслідком збільшення жорсткості пружини з ростом відхилення. Протилежний ефект спостерігається при м'якій пружині, для якої h від'ємний.

Суттєвою обставиною, що стосується методу збурень, є те, що вплив нелінійних членів враховується цим методом шляхом додавання поправочних членів до породжуючого розв'язку. Якщо природа задачі така, що ці додаткові доданки допускають просте тлумачення і дають простий опис явища, то метод збурень дає правильний підхід до її розв'язку. З іншого боку, метод збурень виявляється набагато слабшим при розв'язку багатьох задач іншого типу. Наприклад, коливальна система, в якій амплітуда коливань змінюється з часом, не допускає простого дослідження за допомогою цього методу. Зміна амплітуди не може бути просто вираженою додатковими поправочними членами, і в цьому випадку бажаний інший підхід до розв'язку задачі.

6.5 Реверсивний метод

При визначенні розв'язку нелінійного рівняння методом збурень, роблять припущення, що цей розв'язок може бути записаний у вигляді ряду по степеням деякого малого параметру, і підставляють цей ряд у початкове рівняння, з тим, щоб визначити всі невідомі функції, що входять

в розвинення. У деяких випадках зручно, щоб усі етапи розв'язку були зведені до набору формул. Такі формули передбачені у реверсивному методі. Реверсивний метод та метод збурень представляють собою по суті одне й те ж і різняться лише у деталях.

Для застосування реверсивного методу представимо початкове рівняння у формі

$$f_1(D)x + f_2(D)x^2 + \dots + f_n(D)x^n = \mu F(t), \quad (6.35)$$

де $f_1(D)$, $f_2(D)$, ..., $f_n(D)$ — функції оператора диференціювання $D = d/dt$; $F(t)$ — зовнішнє збурення і μ — числовий параметр, що вводиться для спрощення розв'язку. Знайшовши розв'язок, приймають $\mu = 1$. Рівняння повинне містити лінійну частину, що приводить до вимоги $f_1(D) \neq 0$. Розв'язок рівняння (6.35) шукають у формі

$$x = \mu(x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots), \quad (6.36)$$

де x_0 , x_1 , x_2 , ... — функції від t , які потребують визначення.

Степені x можуть бути виражені у вигляді

$$x^2 = \mu^2(x_0^2 + \mu 2x_0x_1 + \dots);$$

$$x^3 = \mu^3(x_0^3 + \dots) \text{ і т. д.}$$

Підстановка у рівняння (6.35) дає:

$$\begin{aligned} f_1(D)[\mu(x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots)] + f_2(D)[\mu^2(x_0^2 + \mu 2x_0x_1 + \dots)] + \\ + f_3(D)[\mu^3(x_0^3 + \dots)] + \dots = \mu F(t). \end{aligned}$$

Так само, як і у методі збурень, прирівнюються члени рівняння, що містять параметр μ в однаковому степені, що приводить до наступної системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} f_1(D)x_0 &= F(t) \\ f_1(D)x_1 &= -f_2(D)x_0^2 \\ f_1(D)x_2 &= -f_3(D)x_0^3 - 2f_2(D)x_0x_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Рівняння цієї системи розв'язуються послідовно з урахуванням на кожному етапі відповідних початкових умов для розрахунку довільних постійних по мірі їх появи. Перше рівняння дає x_0 , значення якого слід використовувати для визначення x_1 з другого рівняння. Обидві ці функції потім використовують для розв'язку третього рівняння та знаходження x_2 . Хоча тут і розглядаються лише поправки включно до другого порядку, очевидно, що тим же способом можна отримати поправочні члени до будь-якого бажаного порядку.

Реверсивний метод у тій формі, що розглядається, передбачає виключення вікових членів, якщо такі з'являються. Тому його не можна, взагалі кажучи, застосувати безпосередньо при розв'язку задач, що стосуються нелінійних коливальних систем. Проте для неколивальних систем задача зводиться до застосування готового набору формул.

Приклад 4. Розряд конденсатора через діод

Контур (рис. 6.6), що був розглянутий у прикладі 1, можна досліджувати також реверсивним методом. Рівняння контуру:

$$\begin{aligned} C \frac{de}{dt} + ae + be^2 &= 0; \\ A &= a/C; \quad B = b/C; \\ \dot{e} + Ae + Be^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

і початкові умови $e = E$ при $t = 0$.

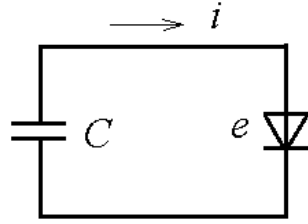


Рис. 6.6 Коливальний контур

В позначеннях рівняння (6.35) визначені функції

$$f_1(D) = D + A \equiv \frac{d}{dt} \dot{e} + Ae;$$

$$F(t) = 0;$$

$$f_2(D) = B; f_3(D) = 0.$$

Розв'язок знаходимо у формі

$$e = \mu(e_0 + \mu e_1 + \mu^2 e_2),$$

де в кінці кінців μ прирівнюється до одиниці. Перше з рівнянь (6.37) дає:

$$f_1(D) = F(t) \rightarrow (D + A)e_0 = 0;$$

$$\frac{de_0}{dt} + Ae_0 = 0; t = 0; e_0 = E;$$

$$e_0 = Ce^{-At}; C = E; e_0 = Ee^{-At};$$

$$f_1(D)x_1 = -f_2(D)x_0^2.$$

З другого рівняння (6.37) витікає

$$(D + A)e_1 = -BE^2e^{-2At} \text{ при } t = 0 \quad e_1 = 0;$$

$$\frac{de_1}{dt} + Ae_1 = -BE^2e^{-2At};$$

$$e_1 = \frac{BE^2}{A} [e^{-2At} - e^{-At}].$$

Нарешті, з третього рівняння системи (6.37):

$$f_1(D)e_2 = -f_3(D)e_0^3 - 2f_2(D)e_0e_1;$$

$$(D + A)e_2 = 0 - 2Be_0e_1 = -2BEe^{-At} \cdot \frac{BE^2}{A} [e^{-2At} - e^{-At}];$$

$$\frac{de_2}{dt} + Ae_2 = -\frac{2B^2E^3}{A} [e^{-3At} - e^{-2At}] \text{ при } t = 0;$$

$$e_2 = \frac{B^2E^3}{A^2} [e^{-3At} - 2e^{-2At} + e^{-At}].$$

Сума отриманих виразів при $\mu=1$ являє собою наближений розв'язок вихідного нелінійного рівняння. Воно, безумовно, співпадає з виразом (6.12), що знайдений в прикладі 1.

6.6 Метод варіації параметрів

Метод збурень переважно знаходить застосування там, де вплив нелінійності диференціального рівняння може бути легко врахований за допомогою поправочних членів, що додаються до розв'язку. Порівняно меншу вигоду дає застосування цього методу там, де додаткові складові не дають автоматичного врахування нелінійності. Таким є випадок нелінійної системи, у якій амплітуда і фаза коливання змінні. Для таких систем вигідно знаходити наближений розв'язок методом варіації параметрів. Метод застосовується наступним чином.

Рівняння нелінійної коливальної системи другого порядку, що вільна від впливу зовнішніх збурень, можна записати у вигляді

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu \varphi(x, \dot{x}, t) = 0, \quad (6.39)$$

де функція $\varphi(x, \dot{x}, t)$ містить нелінійні члени, а також усі інші члени, що призводять до труднощів при розв'язку, а μ — малий параметр.

Простіше перетворити вихідне рівняння другого порядку в систему двох рівнянь першого порядку, ввівши нову змінну $y = \dot{x}$. У результаті отримаємо систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x - \mu \varphi(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Породжуючий розв'язок знаходиться при нехтуванні функцією φ з чисто лінійної системи, яку можна отримати, якщо в (6.40) покласти $\mu = 0$.

Відтак він є розв'язком рівняння $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ і має форму

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos(\omega_0 t + \theta) \\ y &= -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

де A і θ — константи, що визначаються з початкових умов. Для зручності введемо позначення кута для повного аргументу тригонометричних функцій $\psi = \omega_0 t + \theta$.

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos \psi \\ y &= -\omega_0 A \sin \psi \end{aligned} \right\}$$

При використанні методу варіації параметрів величини A і θ розглядаються як деякі функції часу t . Породжуючий розв'язок (6.41) диференціюється та його похідні підставляються у нелінійну систему рівнянь (6.40):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A} \cos \psi - A \sin \psi \cdot \dot{\psi} \\ \dot{y} &= -\omega_0 \dot{A} \sin \psi - \omega_0 A \cos \psi \cdot \dot{\psi} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} \cos \psi - A \sin \psi \cdot \dot{\psi} &= -\omega_0 A \sin \psi \\ -\omega_0 \dot{A} \sin \psi - \omega_0 A \cos \psi \cdot \dot{\psi} &= -\omega_0^2 A \cos \psi - \mu \varphi(x, y, t) \end{aligned} \right\}$$

$$1. \quad \dot{A} \cos \psi - A \sin \psi [\dot{\psi} - \omega_0] = 0; \quad \dot{A} \cos \psi - A \dot{\theta} \sin \psi = 0;$$

$$2. \quad \begin{aligned} -\dot{A}\omega_0 \sin \psi - \omega_0 A \cos \psi [\dot{\psi} - \omega] &= -\mu \varphi(x, y, t); \\ -\dot{A}\omega_0 \sin \psi - \dot{\theta}\omega_0 A \cos \psi &= -\mu \varphi(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi, t), \end{aligned}$$

де $\dot{A} = dA/dt$ і $\dot{\theta} = d\theta/dt$. Ці рівняння можна розв'язати відносно \dot{A} і $\dot{\theta}$, що приводить до виразів

$$\begin{aligned} \dot{A} \cos \psi - \dot{\theta} A \sin \psi &= 0; \\ -\omega_0 \dot{A} \sin \psi - \dot{\theta} \omega_0 A \cos \psi &= -\mu \varphi; \\ -\dot{\theta} \omega_0 [\sin^2 \psi + \cos^2 \psi] A &= -\mu \varphi \cos \psi; \\ \dot{\theta} &= \frac{\mu \varphi \cos \psi}{\omega_0 A}; \\ \dot{A} \omega_0 [\cos^2 \psi + \sin^2 \psi] &= \mu \varphi \sin \psi; \\ \dot{A} &= \frac{\mu \varphi \sin \psi}{\omega_0}; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\mu}{\omega_0} \sin \psi \cdot \varphi(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi, t) \\ \dot{\theta} &= \frac{\mu}{\omega_0 A} \cos \psi \cdot \varphi(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi, t) \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

Отримана система диференціальних рівнянь зазвичай виявляється настільки складною, що отримати точний вираз A і θ з її допомогою не є можливим. Однак, слід зазначити, що якщо параметр μ в початковому рівнянні рівний нулю, то як \dot{A} так і $\dot{\theta}$ також рівні нулю і, виходячи з цього, A і θ не змінюються з часом. З огляду на це вважають, що якщо μ достатньо малий, то A і θ змінюються порівняно повільно. Зокрема, відносна зміна A і θ протягом одного циклу коливань вважається малою. При такій умові допустимо розглядати середнє значення \dot{A} і $\dot{\theta}$ за цикл коливань замість миттєвих значень цих величин у кожний момент цього циклу.

Середні значення за цикл коливань визначаються звичайним способом:

$$\left. \begin{aligned} \left[\dot{A} \right]_{сер} &= \frac{\mu}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin\psi \cdot \varphi(A\cos\psi, -\omega_0 A\sin\psi, t) d\psi \\ \left[\dot{\theta} \right]_{сер} &= \frac{\mu}{2\pi\omega_0 A} \int_0^{2\pi} \cos\psi \cdot \varphi(A\cos\psi, -\omega_0 A\sin\psi, t) d\psi \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

При розрахунку середніх значень вважається, що як A , так і θ постійні протягом усього циклу. Математично це означає, що μ настільки малий, що

$$\left| \frac{\dot{A}}{A} \right| \frac{2\pi}{\omega_0} \ll 1;$$

$$\frac{|\dot{\theta}|}{\omega_0} \ll 1.$$

За цих умов \dot{A} і $\dot{\theta}$ істотні для розв'язку задачі.

Інтеграл від \dot{A} визначає зміну A у часі. Повний фазовий кут $\psi = \omega_0 t + \theta$ та його похідна $d\psi/dt$ визначають миттєве значення частоти ω так, що $\omega = d\psi/dt = \omega_0 + \dot{\theta}$. Таким чином, миттєва кутова частота може бути знайдена безпосередньо по $\dot{\theta}$.

У попередньому дослідженні розглядався породжуючий розв'язок $x = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, де A і θ — параметри, що варіюються. Вони виражають амплітуду та фазовий кут розв'язку, який при цьому природно розглядати у полярній системі координат. Дещо змінений спосіб застосування того ж методу можна вважати зв'язаним із зображенням розв'язку в прямокутній системі координат. В цьому випадку породжуючий розв'язок для рівняння (6.39) записують у формі

$$\left. \begin{aligned} x &= P \cos \omega_0 t + Q \sin \omega_0 t \\ y &= -P \omega_0 \sin \omega_0 t + Q \omega_0 \cos \omega_0 t \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

причому параметри P і Q , що варіюються, відповідають амплітудам двох ортогональних компонент розв'язку. Розглядаючи P і Q як функції часу і діючи по аналогії до попереднього дослідження, приходимо до системи рівнянь відносно \dot{P} і \dot{Q} :

$$\left. \begin{aligned} \dot{P} &= \mu \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cdot \varphi(x, y, t) \\ \dot{Q} &= -\mu \frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \cdot \varphi(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

І в цьому випадку можна вважати, що μ настільки мале, що

$$\left| \frac{\dot{P}}{P} \right| \frac{2\pi}{\omega_0} \ll 1 \text{ і } \left| \frac{\dot{Q}}{Q} \right| \frac{2\pi}{\omega_0} \ll 1,$$

і аналогічно попередньому визначити середні значення $[\dot{P}]_{\text{сеп}}$ і $[\dot{Q}]_{\text{сеп}}$.

У більшості задач, що розв'язуються методом варіації параметрів, зручніше виражати результати у термінах амплітуди і фази коливань, тому зазвичай надають перевагу прив'язці розв'язку до полярної системи координат. Однак у деяких випадках другий спосіб і пов'язана з ним прямокутна система координат можуть виявитися зручнішими.

Приклад 5. Нелінійний осцилятор

У прикладі 3 розглядалося рівняння механічної системи, що містить тіло постійної маси, яке утримується за рахунок нелінійної пружини,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + h x^3 = 0 \quad (6.46)$$

Знайти розв'язок цього рівняння при початкових умовах $x = A_0$ і $\dot{x} = 0$ при $t = 0$, користуючись методом варіації параметрів.

Рівняння (6.46) запишемо у вигляді системи

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x - hx^3 \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

для якої породжуючий розв'язок

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_0 t + \theta) = A \cos \psi; \\ y &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta) = -A\omega_0 \sin \psi. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Варіюючи параметри A і θ , отримаємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} \cos \psi - \dot{\theta} A \sin \psi &= 0 \\ -\dot{A} \omega_0 \sin \psi - \dot{\theta} \omega_0 A \cos \psi &= -hA^3 \cos^3 \psi \end{aligned} \right\}$$

звідки \dot{A} і $\dot{\theta}$ виражаються формулами

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{hA^3}{\omega_0} \cos^3 \psi \cdot \sin \psi; \\ \dot{\theta} &= \frac{hA^2}{\omega_0} \cos^4 \psi. \end{aligned}$$

При розрахунку середніх значень зручно користуватись тотожностями

$$\begin{aligned} \cos^3 \psi \sin \psi &= \frac{1}{8} \sin 4\psi + \frac{1}{4} \sin 2\psi; \\ \cos^4 \psi &= \frac{1}{8} \cos 4\psi + \frac{1}{2} \cos 2\psi + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Оскільки середні значення коливань синуса і косинуса за період коливань рівні нулю, середні значення правих частин цих тотожностей просто рівні величині постійного доданку, що у них міститься. З огляду на це, шукані середні

$$\left. \begin{aligned} [\dot{A}]_{\text{сеп}} &= 0 \\ [\dot{\theta}]_{\text{сеп}} &= \frac{3hA^2}{8\omega_0} \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

Інтегрування по часу дає

$$A = C_1;$$

$$\theta = \frac{3hA^2t}{8\omega_0} + C_2.$$

внаслідок чого породжуючий розв'язок (6.47) приймає форму

$$x = C_1 \cos\left(\omega_0 t + \frac{3hA^2t}{8\omega_0} + C_2\right).$$

Враховуючи початкові умови $x = A_0$ і $\dot{x} = 0$ при $t = 0$, знаходимо постійні інтегрування $C_1 = A_0$, $C_2 = 0$ і остаточно знаходимо розв'язок

$$x = A_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{3hA_0^2}{8\omega_0}\right)t \quad (6.50)$$

з миттєвою круговою частотою

$$\omega = \omega_0 + \dot{\theta} = \omega_0 + \frac{3hA_0^2}{8\omega_0} \quad (6.51)$$

У першому наближенні нелінійність пружини не позначається на амплітуді коливань, але приводить до зміни їх частоти. Значення частоти коливань, отримане у прикладі 3 за допомогою методу збуджень,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3hA_0^2}{4},$$

що при малих h приводить до наближеної формули

$$\omega = \omega_0 + \frac{3hA_0^2}{8\omega_0},$$

що в точності відповідає отриманому нами результату.

Умовою застосування методу варіації параметрів є $|\dot{\theta}|/\omega_0 \ll 1$.

У даному випадку $|\dot{\theta}|/\omega_0 = 3hA_0^2/8\omega_0^2$ і h повинно бути настільки малим, щоб ця величина виявилася значно меншою, ніж 1, звідки $h \ll 8\omega_0^2/3A_0^2$.

Приклад 6. Лінійний демпфований осцилятор

Лінійний осцилятор з в'язким демпфіруванням описується рівнянням

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.52)$$

де α і ω_0 – постійні.

Знайдемо розв'язок рівняння (6.52) для початкових умов $x = A_0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x - 2\alpha y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos(\omega_0 t + \theta) \\ y &= -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \theta) \end{aligned} \right\}$$

$$\psi = \omega_0 t + \theta \rightarrow \left. \begin{aligned} x &= A \cos \psi \\ y &= -\omega_0 A \sin \psi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A} \cos \psi - A \sin \psi \cdot \dot{\psi} \\ \dot{y} &= -\omega_0 \dot{A} \sin \psi - \omega_0 A \cos \psi \cdot \dot{\psi} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} \cos \psi - A \sin \psi \cdot \dot{\psi} &= -\omega_0 A \sin \psi \\ \dot{A} \cos \psi - A \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \psi &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -\omega_0 \dot{A} \sin \psi - \omega_0 A \cos \psi \cdot \dot{\psi} &= -\omega_0^2 A \cos \psi - 2\alpha [\dot{A} \cos \psi - A \sin \psi \cdot \dot{\psi}] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -\omega_0 \dot{A} \sin \psi - \dot{\theta} \omega_0 A \cos \psi &= -2\alpha [\dot{A} \cos \psi - A \sin \psi \cdot \omega_0 - A \sin \psi \cdot \dot{\theta}] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -\omega_0 \dot{A} \sin \psi - \omega_0 A \cos \psi \cdot \dot{\psi} &= -\omega_0^2 A \cos \psi - 2\alpha [\dot{A} \cos \psi - A \sin \psi \cdot \dot{\psi}] \\ -\omega_0 \dot{A} \sin \psi - \dot{\theta} \omega_0 A \cos \psi &= 2\alpha A \sin \psi \cdot \omega_0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= -2\alpha A \sin^2 \psi \\ \dot{\theta} &= -2\alpha \sin \psi \cos \psi \end{aligned} \right\}$$

середнє значення яких

$$\left. \begin{aligned} \left[\dot{A} \right]_{cep} &= -\alpha A \\ \left[\dot{\theta} \right]_{cep} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

В результаті інтегрування отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} A &= C_1 e^{-\alpha t} \\ \theta &= C_2 \end{aligned} \right\}$$

і породжуючий розв'язок набуває форми

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + C_2) \\ y &= C_1 e^{-\alpha t} \left[-\alpha \cos(\omega_0 t + C_2) - \omega_0 \sin(\omega_0 t + C_2) \right] \end{aligned} \right\}$$

З урахуванням початкових умов $x = A_0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$ і, вважаючи, що $\alpha / \omega_0 \ll 1$, як це вимагається для того, щоб виправдати застосування методу варіації параметрів, отримаємо:

$$\begin{aligned} A_0 &= C_1 \cos C_2; \\ 0 &= -\alpha C_1 \cos C_2 - C_1 \omega_0 \sin C_2; \\ 0 &= -\alpha A_0 - \omega_0 \frac{A_0}{\cos C_2} \sin C_2; \\ 0 &= -A_0 [\alpha + \omega_0 \operatorname{tg} C_2]; \\ \operatorname{tg} C_2 &= -\frac{\alpha}{\omega_0}; \\ x &= A_0 e^{-\alpha t} \cos \left(\omega_0 t - \frac{\alpha}{\omega_0} \right). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Таким чином, в першому наближенні дія розсіяння енергії позначається в зміні амплітуди коливань і не приводить до зміни частоти. Для застосування цього методу необхідно, щоб $|\dot{A} / A| (2\pi / \omega_0) \ll 1$ і, оскільки $|\dot{A} / A| = \alpha$, необхідно, щоб $\alpha \ll \omega_0 / 2\pi$.

Відомо, що точним розв'язком лінійного рівняння (6.52) є

$$x = A_0 \omega_0 (\omega_0^2 - \alpha^2)^{-1/2} e^{-\alpha t} \cos \left[(\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} t - \arctg \frac{\alpha}{\omega_0} \right].$$

За умови, що $\alpha / \omega_0 \ll 1$, він співпадає з виразом (6.54).

6.5 Застосування декількох методів

Для визначення якомога більш повних характеристик типової нелінійної системи зазвичай доводиться застосовувати декілька різних методів дослідження. Частину відомостей вдається отримати за допомогою одного методу, а інші додаткові відомості визначаються за допомогою інших методів.

Приклад 7. Генератор коливань з від'ємним опором

а) Попереднє вивчення схеми. Щойно розглянуті аналітичні методи можна застосувати до дослідження генератора коливань з нелінійним від'ємним опором.

Миттєві значення струму i в нелінійному від'ємному опорі, величина якого визначається прикладеною напругою, і падіння напруги e на його полюсах пов'язані залежністю, характер якої представлений на рис. 6.7. Для аналітичного дослідження цю залежність необхідно виразити алгебраїчно. Найпростішим рівнянням, відповідної непарної залежності такого роду, є

$$i = -ae + be^3, \quad (6.55)$$

де a і b – додатні сталі.

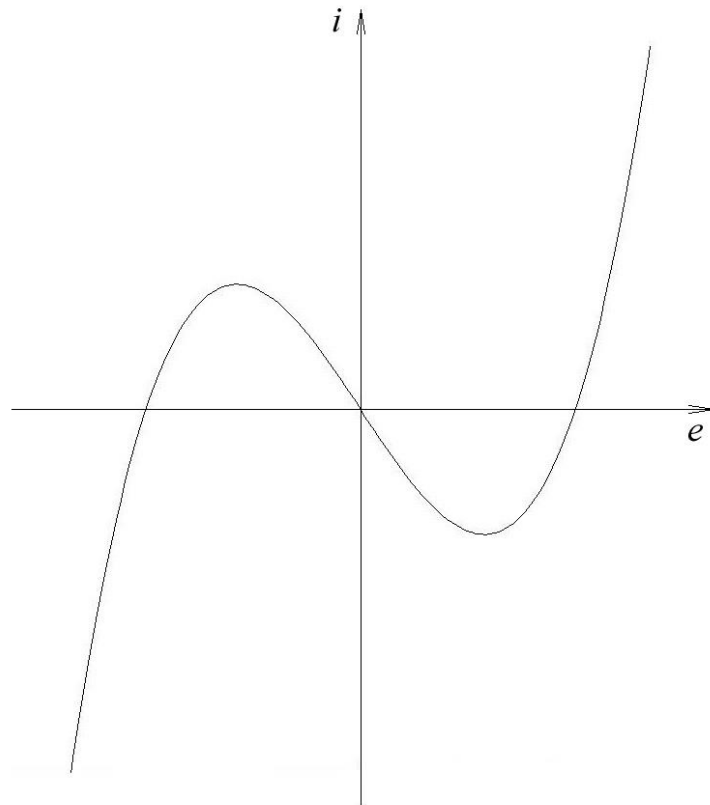


Рис. 6.7. Характеристика нелінійного елемента з ділянкою від'ємного опору до прикладу 7

Початок координат розташовано посередині ділянки з від'ємним нахилом і зсунуто у порівнянні з рис. 6.8. Таке зміщення відповідає лише зміні початку відліку. Для малих напруг і струмів динамічний опір елемента від'ємний; для великих напруг і струмів він додатний.

Проста автоколивальна система може бути отримана шляхом використання від'ємного опору по схемі рис. 6.8, де L , R і C – лінійні елементи з постійними параметрами.

Рівняння кола, представленого на рис. 6.9, може бути легко отримано за допомогою першого закону Кірхгофа:

$$i_C + i + i_L = 0,$$

де $i_C = C\dot{e}$; $i = -ae + be^3$; $Ldi_L / dt + Ri_L = e$.

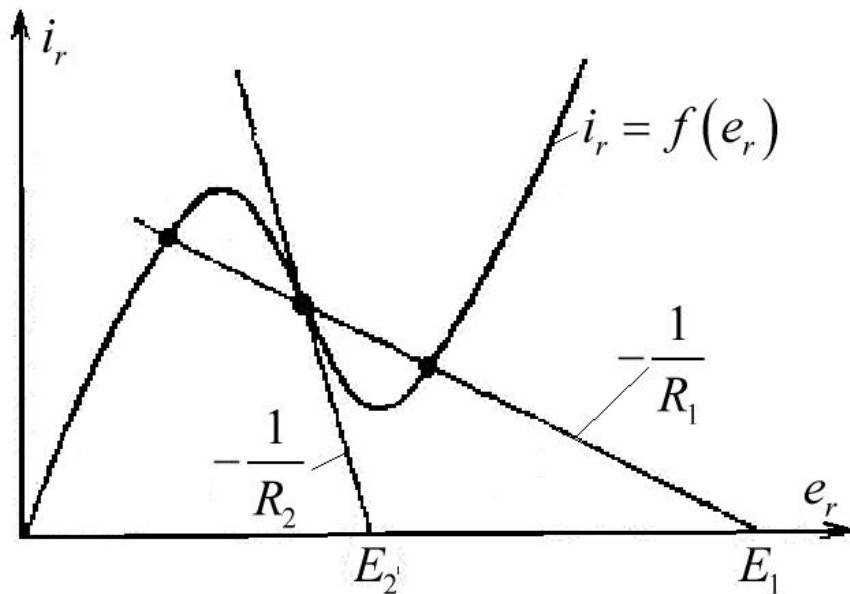


Рис. 6.8. Типова характеристика нелінійного елементу з ділянкою від'ємного опору. Показана побудова прямих навантаження для двох випадків, які відрізняються значеннями опору навантаження і напруги живлення

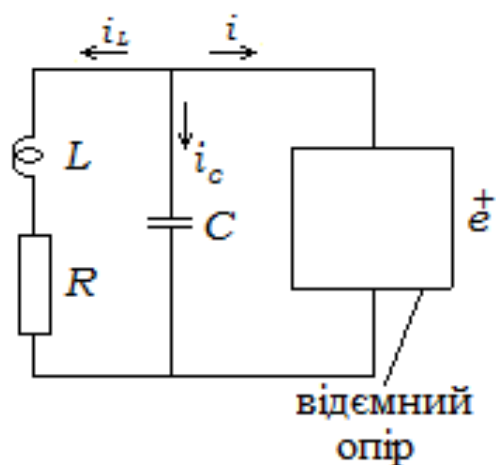


Рис. 6.9. Схема генератора з від'ємним опором до прикладу 7

Підставимо значення i і спростимо вираз:

$$C\ddot{e} - ae + be^3 = -i_L;$$

$$C\ddot{e} - ae + 3be^2\dot{e} + \frac{e}{L} - \frac{R}{L}i_L = 0;$$

$$C\ddot{e} - a\dot{e} + 3be^2\dot{e} + \frac{e}{L} + \frac{R}{L}[C\dot{e} - ae + be^3] = 0;$$

$$\ddot{e} - \dot{e}\frac{a}{C}\left(1 - \frac{3be^2}{a}\right) + \frac{e}{LC} + \frac{R}{L}\left(\dot{e} - \frac{a}{C}e + \frac{b}{C}e^3\right) = 0.$$

Внаслідок низки умов, істотних для автоколивальної системи, опір R має бути настільки малим, щоб останнім доданком, що містить дужки, можна було знехтувати. Зроблене нами припущення про нехтовно малий вплив опору R дозволяє істотно спростити рівняння. Насправді нам ще випаде можливість при дослідженні системи зробити деякі висновки про вплив цього опору. Опускаючи члени, що містять R , запишемо рівняння у формі

$$\ddot{e} - \dot{e}\omega_0\alpha(1 - \beta e^2) + \omega_0^2 e = 0, \quad (6.56)$$

де $\alpha = a / C\omega_0$, $\beta = 3b / a$ і $\omega_0^2 = 1 / LC$.

Отримане рівняння збігається з рівнянням Ван дер Поля, за винятком того, що в ньому додатково фігурують параметри β і ω_0 . Параметр α повністю еквівалентний параметру ε рівняння Ван дер Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Рівняння (6.56) містить нелінійний коефіцієнт демпфірування при e . Очевидно, що при малих напругах e демпфірування від'ємне, тоді як при великих e демпфірування додатне. Від'ємне демпфірування відповідає надходженню енергії в систему, тоді як додатне – витраті енергії системою.

За деяких умов напруга e з плином часу змінюється гармонічно з кутовою частотою ω_0 . Такий, звичайно, випадок $\alpha = 0$. Що це дійсно так, перевірено при експериментальному дослідженні контуру, подібного зображеному на рис. 6.9. Корисним для опису контуру, в якому можуть

відбуватися прості гармонічні коливання, є поняття добротності Q . Одним з визначень добротності такого контуру може слугувати відношення

$$Q = \pi \frac{\text{максимум накопиченої енергії}}{\text{енергія, витрачена за полуперіод}}.$$

Якщо напруга змінюється за законом $e = E \sin \omega_0 t$, максимальна енергія, що накопичується конденсатором протягом циклу коливань, дорівнює $CE^2/2$. Такою є енергія, що циркулює в LC -контурі. Будь-яка зміна циркулюючої енергії викликається лише її розсіянням, що в наших припущеннях має місце лише в елементі з нелінійним опором. Якщо напруга e є настільки малою, що $a \ll 3be^2$, то динамічний опір можна вважати приблизно рівним $-1/a$. Величина зміни енергії за половину періоду коливань при цьому дорівнює $\frac{E^2 a}{2} \cdot \frac{\pi}{\omega_0}$. Для добротності Q за цих

умов одержуємо:

$$Q = \pi \frac{CE^2/2}{\pi a E^2/2\omega_0} = \frac{C\omega_0}{a} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{a} \left(\frac{C}{L} \right)^{1/2}.$$

Таким чином, добротність дорівнює зворотній величині параметра α .

Якщо $Q \gg 1$ або, що те ж саме, $\alpha \ll 1$, всяка зміна енергії протягом циклу коливань складає лише малу частину циркулюючої енергії і зміна амплітуди за цикл відносно мала. Якщо $Q \ll 1$ або, що те ж саме, $\alpha \gg 1$, зміна енергії за цикл велика в порівнянні з циркулюючої енергією і амплітуда коливань може змінитися різко. Аналітичними методами, взагалі кажучи, можна досліджувати лише випадок повільної зміни амплітуди, і застосування цих методів, отже, обмежене випадком $\alpha \ll 1$.

б) *Метод збурень. Сталій режим.* При використанні методу збурень розв'язок представляється у формі

$$e = e_0(t) + \alpha e_1(t) + \alpha^2 e_2(t) + \dots \quad (6.57)$$

Оскільки розглядається нелінійна коливальна система, слід передбачити можливість зміни частоти коливань в залежності від їх амплітуди:

$$\omega = \omega_0 + \alpha b_1(A) + \alpha^2 b_2(A) + \dots,$$

або

$$\omega_0 = \omega - \alpha b_1(A) - \alpha^2 b_2(A) - \dots \quad (6.58)$$

Тут ми розвиваємо в ряд ω , а не ω^2 , як ми робили раніше, оскільки в рівняння (6.56) величина ω^2 входить як лінійно, так і квадратично. Те, що у виразі (6.30) прикладу 3 вводилися поправки до ω_0^2 , пояснювалося тим, що лише друга степінь ω_0 фігурувала в рівнянні (6.27). Підстановка (6.57) і (6.58) в рівняння (6.56) дає:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{e}_0 + \alpha \dot{e}_1 + \alpha^2 \dot{e}_2 + \dots; \\ \ddot{e} &= \ddot{e}_0 + \alpha \ddot{e}_1 + \alpha^2 \ddot{e}_2 + \dots; \\ \ddot{e}_0 + \alpha \ddot{e}_1 + \alpha^2 \ddot{e}_2 - [\dot{e}_0 + \alpha \dot{e}_1 + \alpha^2 \dot{e}_2] [\omega - \alpha b_1 - \alpha^2 b_2] \alpha + \alpha \beta [\ddot{e}_0 + \alpha \ddot{e}_1 + \alpha^2 \ddot{e}_2] \times \\ &\times [\omega - \alpha b_1 - \alpha^2 b_2] [e_0^2 + 2\alpha e_0 e_1 + 2\alpha^2 e_0 e_2] + \\ &+ [e_0 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2] [\omega^2 - 2\alpha \omega b_1 - 2\alpha^2 \omega b_2] = 0; \\ \ddot{e}_0 + \alpha \ddot{e}_1 + \alpha^2 \ddot{e}_2 - \alpha \dot{e}_0 \omega + \alpha^2 \dot{e}_0 b_1 - \alpha^2 \omega \dot{e}_1 + \alpha \beta \dot{e}_0 \omega e_0^2 - \alpha^2 \beta \dot{e}_0 b_1 e_0^2 + \\ &+ 2\alpha^2 e_0 e_1 \dot{e}_0 \beta \omega + \alpha^2 \beta \dot{e}_1 \omega e_0^2 + \omega^2 e_0 + \alpha e_1 \omega^2 - 2\alpha \omega e_1 e_0 - \\ &- 2\alpha^2 \omega b_2 e_0 - 2\alpha^2 \omega b_1 e_1 + \alpha^2 \omega^2 e_2 \cdot \alpha^2 b_1^2 e_2 = 0. \\ \ddot{e}_0 + \alpha \ddot{e}_1 + \alpha^2 \ddot{e}_2 - \alpha \omega \dot{e}_0 - \alpha^2 \omega \dot{e}_1 + \alpha^2 b_1 \dot{e}_0 + \alpha \beta \omega e_0^2 \dot{e}_0 + 2\alpha^2 \beta \omega e_0 e_1 \dot{e}_0 - \alpha^2 \beta b_1 e_0^2 \dot{e}_0 + \\ &+ \alpha^2 \beta \omega e_0^2 \dot{e}_1 + \omega^2 e_0 + \alpha \omega^2 e_1 + \alpha^2 \omega^2 e_2 - 2\alpha b_1 \omega e_0 - 2\alpha^2 b_1 \omega e_1 + \\ &+ \alpha^2 b_1^2 e_0 - 2\alpha^2 b_2 \omega e_0 = 0. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Задамо початкові умови $e = E$, $\dot{e} = 0$ при $t = 0$. У процесі розв'язку виявиться, що початкова напруга E не може бути вибрана довільно, а повинна мати певне значення.

Породжуючий розв'язок визначається рівнянням

$$\ddot{e}_0 + \omega^2 e_0 = 0$$

і має вигляд $e_0 = P_0 \cos \omega t + Q_0 \sin \omega t$. З врахуванням початкових умов $e = E$, $\dot{e} = 0$ при $t = 0$ отримаємо породжуючий розв'язок у формі

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= E \cos \omega t \\ \omega &= \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

Поправка першого порядку визначається рівнянням

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + \omega^2 e_1 &= \omega \dot{e}_0 - \beta \omega e_0^2 \dot{e}_0 + 2b_1 \omega e_0 = \\ &= \left(-\omega^2 E + \frac{\beta \omega^2 E^2}{4} \right) \sin \omega t + 2b_1 \omega E \times \\ &\quad \times \cos \omega t + \frac{\beta \omega^2 E^2}{4} \sin 3\omega t, \end{aligned}$$

для спрощення якого використовувалася тотожність

$$\cos^2 \theta \sin \theta = \frac{1}{4} (\sin \theta + \sin 3\theta).$$

Для виключення вікових членів необхідно, щоб перетворювалися в нуль вирази $\omega^2 E (1 - \beta E^2 / 4)$ і $2b_1 \omega E$. Випадок $E = 0$ – тривіальний. Єдиний випадок, який представляє інтерес, полягає в тому, що одночасно виконуються рівності

$$E^2 = \frac{4}{\beta}$$

або, що те ж саме,

$$E = \pm \frac{2}{\beta^{1/2}} = \pm 2 \left(\frac{a}{3b} \right)^{1/2} \text{ і } b_1 = 0.$$

Таким чином, у першому наближенні частота коливань виявляється незмінною, а їх амплітуда повинна мати певне значення. Поправка першого порядку

$$e_1 = P_1 \cos \omega t + Q_1 \sin \omega t - \frac{\beta E^2}{32} \sin 3\omega t.$$

З урахуванням початкових умов $e = E$, $\dot{e} = 0$ при $t = 0$ і отриманої нами умови $\beta E^2 = 4$ ця поправка приймає форму

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{E}{8} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t) \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

Породжуючий розв'язок:

$$\ddot{e}_0 + \omega^2 e_0 = 0, \text{ при } t = 0 \quad e_0 = E;$$

$$e_0 = P_0 \cos \omega t + Q_0 \sin \omega t;$$

$$\dot{e}_0 = -\omega P_0 \sin \omega t + Q_0 \omega \cos \omega t;$$

$$e_0 = E = P_0 + 0; \quad P_0 = E;$$

$$0 = -\omega P_0 0 + \omega Q_0; \quad Q_0 = 0;$$

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= E \cos \omega t \\ \omega &= \omega_0 \end{aligned} \right\} \text{ породжуючий розв'язок.}$$

Поправка першого порядку:

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + \omega^2 e_1 &= \omega \dot{e}_0 - \beta \omega e_0^2 \dot{e}_0 + 2b_1 \omega e_0 = \\ &= -\omega^2 E \sin \omega t + \beta \omega E^3 \cos^2 \omega t \cdot \omega E \sin \omega t + 2b_1 \omega E \cos \omega t = \\ &= \left| \cos^2 \theta \sin \theta = \frac{1}{4} [\sin \theta + \sin 3\theta]; \right| = \\ &= -\omega^2 E \sin \omega t + \frac{\beta \omega^2 E^3}{4} [\sin \omega t + \sin 3\omega t] + 2b_1 \omega E \cos \omega t = \\ &= \left[-\omega^2 E + \frac{\beta \omega^2 E^3}{4} \right] \sin \omega t + 2b_1 \omega E \cos \omega t + \frac{\beta \omega^2 E^3}{4} \sin 3\omega t. \end{aligned}$$

Для виключення вікових членів:

$$-\omega^2 E + \frac{\beta \omega^2 E^3}{4} \equiv 0; \quad -\omega^2 E \left(1 - \frac{\beta E^2}{4} \right) \equiv 0; \quad E^2 = \frac{4}{\beta}; \quad E = \pm \frac{e}{\sqrt{\beta}}.$$

$$2b_1 \omega E = 0; \quad b_1 = 0.$$

$$e_1 = P_1 \cos \omega t + Q_1 \sin \omega t - A \sin 3\omega t;$$

$$\ddot{e}_1 + \omega^2 e_1 = \frac{\beta \omega^2 E^3}{4} \sin 3\omega t \equiv A \sin 3\omega t;$$

$$e_{11} = N \cos 3\omega t + M \sin 3\omega t;$$

$$\dot{e}_{11} = -3\omega N \sin \omega t + 3\omega M \cos 3\omega t;$$

$$\ddot{e}_{11} = -9\omega^2 N \cos 3\omega t - 9\omega^2 M \sin 3\omega t;$$

$$-9\omega^2 N \cos 3\omega t - 9\omega^2 M \sin 3\omega t + \omega^2 N \cos 3\omega t + \omega^2 M \sin 3\omega t = A \sin 3\omega t;$$

$$\cos 3\omega t \left[-9\omega^2 N + \omega^2 N \right] = 0;$$

$$\sin 3\omega t \left[-9\omega^2 M + \omega^2 M \right] = A;$$

$$-8\omega^2 N = 0 \rightarrow N = 0;$$

$$-8\omega^2 M = \frac{\beta \omega^2 E^3}{4};$$

$$M = \frac{-\beta \omega^2 E^3}{4 \cdot 8\omega^2} = -\frac{\beta E^3}{32}.$$

Поправка першого порядку:

$$e_1 = P_1 \cos \omega t + Q_1 \sin \omega t - \frac{\beta E^3}{32} \sin 3\omega t.$$

Початкові умови $e_1 = 0$, $\dot{e}_1 = 0$ при $t = 0$, $E^2 = \frac{4}{\beta}$:

$$0 = P_1 + Q_1 \cdot 0 - \frac{E \cdot 4}{32} \sin 3\omega t; \quad P_1 = 0;$$

$$\dot{e}_1 = -\omega P_1 \cos \omega t + \omega Q_1 \cos \omega t - \frac{E}{8} 3\omega \cos 3\omega t;$$

$$0 = 0 + \omega Q_1 - \frac{3}{8} E \omega; \quad Q_1 = \frac{3}{8} E;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \frac{3}{8} E \sin \omega t - \frac{E}{8} \sin 3\omega t = \frac{E}{8} [3 \sin \omega t - \sin 3\omega t] \\ b_1 = 0 \end{array} \right.$$

Поправка другого порядку визначається з рівняння:

$$\ddot{e}_{11} + \omega^2 e_2 = \omega \dot{e}_2 - b_1 \dot{e}_0 - 2\beta \omega e_0 e_1 \dot{e}_0 + \beta b_1 e_0^2 \dot{e}_0 - \beta_1 \omega e_0^2 \dot{e}_1 + 2b_1 \omega e_1 - b_1^2 e_1 + 2b_2 \omega e_0.$$

Підставляємо в нього $e_0 = E \cos \omega t$, $e_1 = \frac{E}{8} [3 \sin \omega t - \sin 3\omega t]$, $b_1 = 0$:

$$\ddot{e}_{11} + \omega^2 e_2 = \omega^2 E \left(\frac{1}{8} + \frac{2b_2}{\omega} \right) \cos \omega t + \omega^2 E \left(-\frac{3}{4} \right) \cos 3\omega t + \omega^2 E \left(\frac{5}{8} \right) \cos 5\omega t.$$

Для спрощення цього рівняння застосуємо декілька тригонометричних тотожностей. Віковий член виключається за умови $1/8 + 2b_2/\omega = 0$ або $b_2 = -\omega/16$. Поправка другого порядку виражається як:

$$e_2 = P_2 \cos \omega t + Q_2 \sin \omega t + \left(\frac{3}{32} \right) E \cos 3\omega t - \left(\frac{5}{192} \right) E \cos 5\omega t.$$

З урахуванням початкових умов $e_2 = 0$, $\dot{e}_2 = 0$ при $t = 0$, цей вираз приймає вигляд

$$\left. \begin{array}{l} e_2 = -\frac{E}{192} (13 \cos \omega t - 18 \cos 3\omega t + 5 \cos 5\omega t) \\ b_2 = -\frac{\omega}{16} \end{array} \right\} \quad (6.62)$$

Таким чином, друге наближення розв'язку визначається залежністю

$$\left. \begin{aligned} e &= E \cos \omega t + \alpha \frac{E}{8} (3 \sin \omega t - \sin 3 \omega t) - \\ &- \alpha^2 \frac{E}{192} (13 \cos \omega t - 18 \cos 3 \omega t + 5 \cos 5 \omega t) \\ \omega &= \omega_0 + \alpha \cdot 0 + \alpha^2 \left(-\frac{\omega}{16} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

де

$$E = \pm \frac{2}{\beta^{1/2}} = \pm 2 \left(\frac{a}{3b} \right)^{1/2}.$$

Розглядаючи знайдений розв'язок рівняння генератора, можна зробити ряд висновків. По-перше, цей розв'язок, знайдений методом збурень, відповідає режиму сталих коливань. Воно описує процес лише після того, як початковий перехідний процес закінчився і система досягла сталого режиму. У розв'язку фігурує певна амплітуда коливань, яка не залежить від початкового стану системи, – обставина, що відповідає граничному циклу. Коливання по формі не просто гармонічні, вони спотворені вищими гармоніками, з яких третю і п'яту знаходять у другому наближенні. Питома вага вищих гармонік зростає зі збільшенням параметра α . Взагалі кажучи, отриманий розв'язок справедливий лише тому, що α мале в порівнянні з одиницею.

Амплітуда сталих коливань напруги $E = 2 \left(\frac{a}{3b} \right)^{1/2}$ визначається лише параметрами a і b нелінійного елемента. Цей результат допускає просту геометричну інтерпретацію за допомогою нелінійної характеристики. Залежність між струмом і напругою має вигляд $i = -ae + be^3$. Нахил характеристики дорівнює нулю, тобто

$$\frac{di}{de} = 0$$

при $e = \pm(a/3b)^{1/2} = \pm 1/\beta^{1/2}$. Струм відповідний цим точкам, рівний

$$i = \pm \frac{2a/3}{\beta^{1/2}}.$$

Проведемо горизонтальні прямі, що дотикаються до характеристики в точках її нульового нахилу, як показано на рис. 6.10. Ці прямі перетинають гілки додатного нахилу характеристики в точках $e = \mp 2/\beta^{1/2} = \mp E$. Отже, робочою характеристикою, що виражає залежність миттєвих значень i і e , є частина графіка, яка виділена на рис. 6.10.

Якщо параметр α гранично малий, тобто $\alpha = 0$, напруга змінюється косинусоїдально у функції часу. Проектуючи цю косинусоїду на робочу характеристику, можна знайти миттєві значення струму у вигляді функції часу. При нереальному припущенні про те, що напруга відповідає косинусоїді основної частоти, струм виражається чистою косинусоїдою потрійної частоти. У ближчих до практики умовах $\alpha > 0$ і форма кривої напруги не чисто косинусоїдальна. При $\alpha = 1$ це значення надто велике, щоб зберегти точність попереднього аналізу; вираз (6.63) відповідає графіку напруги, також зображеному на рис. 6.10. Графік струму, що відповідає цьому графіку, явно містить основну гармоніку поряд з вищими.

У першому наближенні основна кругова частота коливань дорівнює просто ω , тобто власній частоті лінійної системи. У другому наближенні основна кругова частота виражається формулою

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \alpha^2/16},$$

тобто дещо менша, ніж ω_0 . Причиною цього зменшення є наступна обставина. При $\alpha > 0$ напруга змінюється не чисто гармонічно. У колі, що містить нелінійний опір, він викликає струм, зміна якого істотно

відрізняється від простого гармонічного закону. До складу цього струму входить перша гармоніка основної частоти. Основна частота повинна бути такою, щоб добуток першої гармоніки струму на повний опір LC -контур, відповідний цій частоті, дорівнював основній гармоніці напруги. Ця умова приводить до того, що основна частота коливань системи має бути дещо меншою, ніж резонансна частота LC -контур. Зміна частоти, проте, є лише ефектом другого порядку мализни.

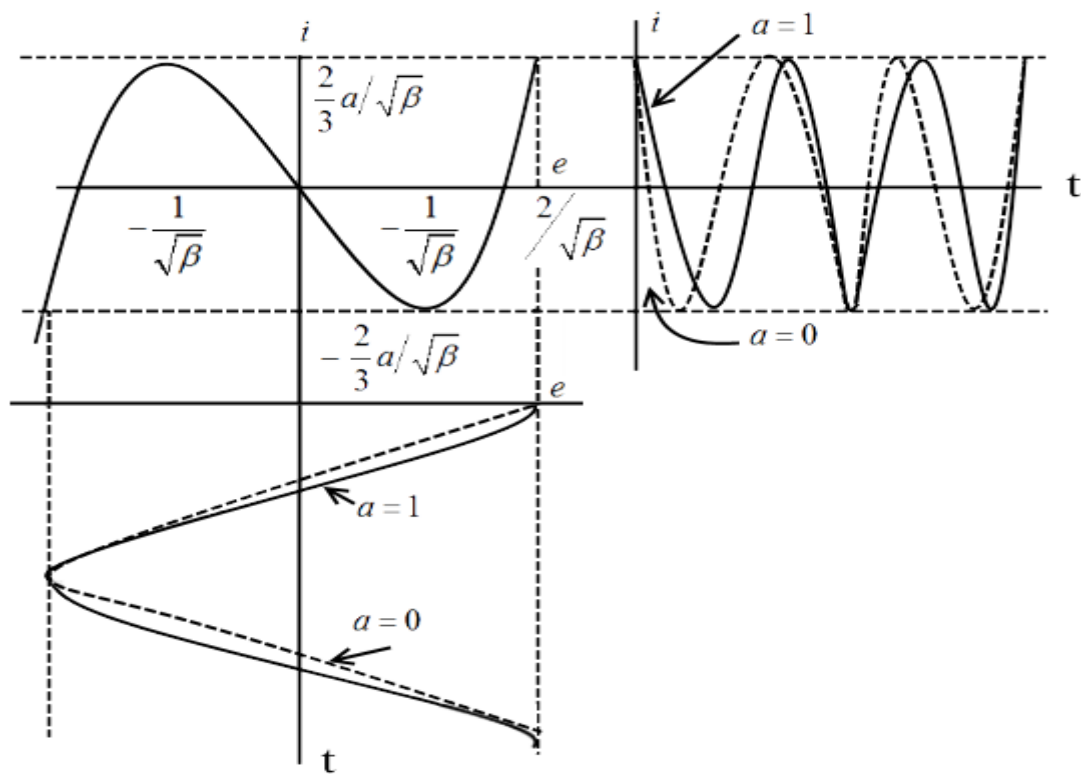


Рис. 6.10. До роботи нелінійного елемента в прикладі 7. Наведені відповідні графіки зміни напруги e і струму i для двох значень параметра α

У попередньому дослідженні опір R , включений послідовно індуктивності в контур (рис. 6.9), передбачався нехтовно малим. Дія цього опору у тому випадку, коли параметр α малий, може бути врахована наступним чином. Як показано нами, коливання відбуваються з частотою,

вельми близькою до резонансної частоти збудженого контуру. При резонансі повний опір паралельного LRC -контуру чисто активний і дорівнює $R' = L/RC$. Додатний опір R' виявляється включеним паралельно з від'ємним опором нелінійного елемента і його дія виражається в тому, що додатна провідність $1/R'$ складається з від'ємною провідністю $-a$. Таким чином, наявність опору R в першу чергу проявляється в зміні рівняння нелінійного елемента, яке набуває вигляду

$$\dot{i} = -\left(a - \frac{1}{R'}\right)e + be^3 = -a'e + be^3.$$

Таким чином, все дослідження слід вести, враховуючи нове значення коефіцієнта $a' = a - 1/R'$ замість колишнього параметра a . Зокрема, очевидно, що значення амплітуди коливань $E = 2(a'/3b)^{1/2}$ стане рівним нулю і далі – уявним, якщо a' виявиться рівним нулю і далі – негативним. Отже, для наявності коливань необхідно, щоб $1/R' = RC/L$ було по модулю менше, ніж параметр a . Це і визначає верхню межу значень опору R збуджуваного контуру, допустиму за умовами виникнення автоколивань.

в) *Метод варіації параметрів. Процес наростання амплітуди коливань.* Процес виникнення або зникнення коливань в системі можна вивчити за допомогою методу варіації параметрів. Система як і раніше описується диференціальним рівнянням (6.56):

$$\ddot{e} - \alpha(1 - \beta e^2)\omega_0 e + \omega_0^2 e = 0.$$

При цьому методі дослідження спочатку визначається породжувач розв'язок у нехтуванні членом, що містить коефіцієнт α , яке має вигляд

$$e = A \cos(\omega_0 t + \theta) = A \cos \psi. \quad (6.64)$$

Розглядаючи A і θ як функції часу, приходимо до системи рівнянь

$$\dot{A} \cos \psi - \dot{\theta} A \sin \psi = 0;$$

$$-\dot{A}\omega_0 \sin \psi - \dot{\theta} A \omega_0 \cos \psi = \alpha (1 - \beta A^2 \cos^2 \psi) \omega_0 \dot{\epsilon};$$

$$-\dot{A}\omega_0 \sin \psi - \dot{\theta} A \omega_0 \cos \psi = \alpha (1 - \beta A^2 \cos^2 \psi) \omega_0 (-A \omega_0 \sin \psi),$$

з якої \dot{A} і $\dot{\theta}$ визначаються у формі

$$\dot{A} = \alpha \omega_0 A \sin^2 \psi (1 - \beta A^2 \cos^2 \psi);$$

$$\dot{\theta} = \alpha \omega_0 A \sin \psi \cos \psi (1 - \beta A^2 \cos^2 \psi).$$

Середні значення, обчислені за цикл коливань,

$$[\dot{A}]_{\text{сеп}} = \alpha \omega_0 A \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta A^2}{8} \right);$$

$$[\dot{\theta}]_{\text{сеп}} = 0.$$

У першому наближенні середня швидкість зміни величини θ дорівнює нулю, так що реальна частота коливань системи збігається з власною частотою лінійної системи. Цей результат збігається з отриманим при дослідженні методом збурень, де зміна частоти виявлялась лише як ефект другого порядку мализни.

Рівняння для \dot{A} може бути записане у формі

$$\dot{A} = \frac{\alpha \omega_0 A}{2} \left(1 - \frac{\beta A^2}{4} \right). \quad (6.65)$$

Його зручно вивчати, зображуючи \dot{A} як функцію A , подібно тому, як це робиться на фазовій площині. Оскільки це рівняння першого порядку, йому на фазовій площині відповідає одна єдина траєкторія, а не сімейство траєкторій, зазвичай відповідних рівнянню другого порядку. Ця траєкторія представлена на рис. 6.11. На ній відмічені три точки, в яких $\dot{A} = 0$, тобто $A = 0$ і $A = \pm 2 / \beta^{1/2}$, що відповідають станам рівноваги системи. Точки, в яких \dot{A} по модулю максимальне, визначаються рівністю $d\dot{A} / dA = 0$, тобто

$$\frac{d\dot{A}}{dA} = \frac{\alpha\omega_0}{2} - \frac{\alpha\omega_0\beta}{8} \cdot 3A^2 = 0; \quad \frac{\alpha\omega_0}{2} \left[1 - \frac{3\beta A^2}{4} \right] = 0; \quad A = \pm 2 / (3\beta)^{1/2};$$

$$\dot{A} = \pm \frac{\alpha\omega_0}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3\beta}} \left(1 - \frac{\beta}{4} \cdot \frac{4}{3\beta} \right) = \pm \frac{\alpha\omega_0}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3\beta}} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \pm \frac{2}{3} \frac{\alpha\omega_0}{\sqrt{3\beta}}.$$

Як і завжди на фазовій площині, час є параметром. У загальному випадку росту часу відповідає правий напрямок у верхній і лівий в нижній половині фазової площини. Отже, час зростає в напрямку, позначеному на рис. 5-9 стрілками. Внаслідок цього положення рівноваги, розташоване на початку координат, нестійке, оскільки зображаюча точка із зростанням часу прагне відійти від початку координат. З іншого боку, рівноважні стани в точках $A = \pm 2 / \beta^{1/2}$ стійкі, оскільки зображаюча точка рухається до цих положень. Стійке значення амплітуди збігається зі сталим значенням E , знайденим за допомогою методу збурень. Природно, що в точках рівноваги швидкість зміни амплітуди $\dot{A} = 0$. Стійкий рівноважний режим відповідає точкам, в яких $d\dot{A}/dA < 0$; нестійкий рівноважний режим – точкам, в яких $d\dot{A}/dA > 0$.

Рівняння (6.65) є рівнянням Бернуллі і його точний розв'язок може бути отриманий методом варіації параметрів.

$$\dot{A} = \frac{\alpha\omega_0 A}{2} \left(1 - \frac{\beta A^2}{4} \right); \quad \dot{A} = \frac{\alpha\omega_0 A}{2} - \frac{\alpha\omega_0 A^3 \beta}{8}; \quad \dot{A} - \frac{\alpha\omega_0 A}{2} = -\frac{\alpha\omega_0 A^3 \beta}{8};$$

$$A^{-3} \dot{A} - A^{-2} \frac{\alpha\omega_0}{2} = -\frac{\alpha\omega_0 \beta}{8};$$

$$A^{-2} = z; \quad -2A^{-3} \dot{A} = \dot{z};$$

$$-\frac{\dot{z}}{2} - z \frac{\alpha\omega_0}{2} = -\frac{\alpha\omega_0 \beta}{8}; \quad \dot{z} + z\alpha\omega_0 = \frac{\alpha\omega_0 \beta}{4};$$

$$\dot{z} + z\alpha\omega_0 = 0; \quad \frac{dz}{dt} + z\alpha\omega_0 = 0;$$

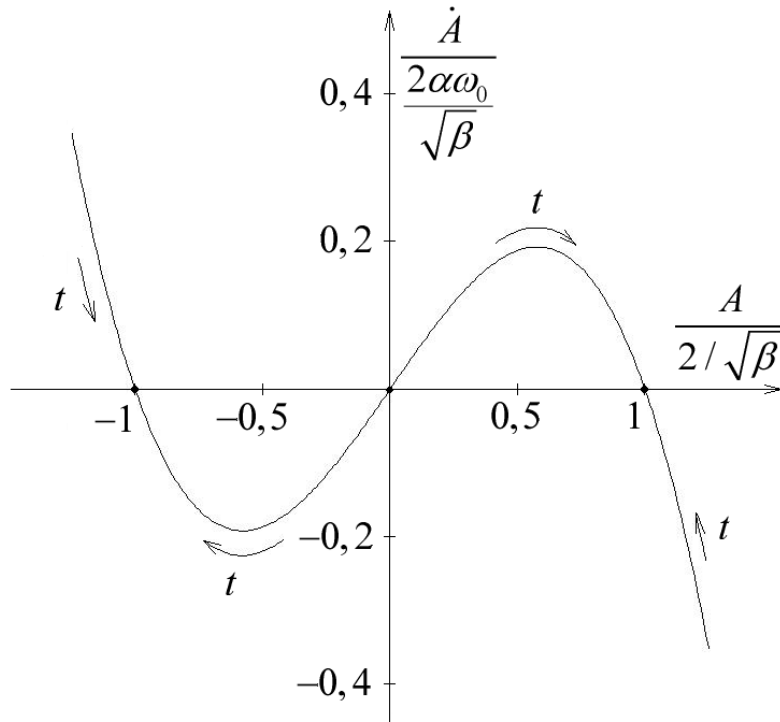


Рис. 6.11. Фазова площина для амплітуди коливань A системи, що розглядається в прикладі 7. Стрілками вказаний напрямок росту часу.

$$\frac{dz}{z} = -\alpha\omega_0 dt; \ln z = -\alpha\omega_0 t; z = Ce^{-\alpha\omega_0 t}; \dot{z} = \dot{C}e^{-\alpha\omega_0 t} - Ce^{-\alpha\omega_0 t} \cdot \alpha\omega_0;$$

$$\dot{C}e^{-\alpha\omega_0 t} - Ce^{-\alpha\omega_0 t} \cdot \alpha\omega_0 + (\alpha\omega_0)Ce^{-\alpha\omega_0 t} = \frac{\alpha\omega_0\beta}{4};$$

$$\dot{C} = \frac{\alpha\omega_0\beta}{4}e^{\alpha\omega_0 t}; C = \frac{\alpha\omega_0\beta}{4} \frac{1}{\alpha\omega_0} e^{\alpha\omega_0 t} + N; C = \frac{\beta}{4} e^{\alpha\omega_0 t} + N;$$

$$z = \frac{\beta}{4} e^{\alpha\omega_0 t} \cdot e^{-\alpha\omega_0 t} + Ne^{-\alpha\omega_0 t} = \frac{\beta}{4} + Ne^{-\alpha\omega_0 t};$$

$$\frac{\beta}{4} + Ne^{-\alpha\omega_0 t} = A^{-2}; A = \pm \frac{1}{\sqrt{\beta/4 + Ne^{-\alpha\omega_0 t}}};$$

$$t=0; A=A_0; \frac{\beta}{4} + N = \frac{1}{A_0^2}; N = \frac{1}{A_0^2} - \frac{\beta}{4} = \frac{4 - \beta A_0^2}{4A_0^2};$$

Тоді точний розв'язок, що відповідає початковій умові $A = A_0$ при $t = 0$, має вигляд

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\beta}{4} + \frac{4 - \beta A_0^2}{4 A_0^2} e^{-\alpha \omega_0 t}}} = \sqrt{\frac{4 A_0^2}{\beta A_0^2 + (4 - \beta A_0^2) e^{-\alpha \omega_0 t}}} = \\
 &= \sqrt{\frac{4 A_0^2}{\beta A_0^2 \left[1 + \left(-1 + \frac{4}{\beta A_0^2} \right) e^{-\alpha \omega_0 t} \right]}} = \sqrt{\frac{4}{\beta \left[1 - \left(1 - \frac{4}{\beta A_0^2} \right) e^{-\alpha \omega_0 t} \right]}}; \\
 A &= \frac{2 / \sqrt{\beta}}{\left[1 - \left(1 - \frac{4}{\beta A_0^2} \right) e^{-\alpha \omega_0 t} \right]^{1/2}}. \tag{6.66}
 \end{aligned}$$

Його графіки, що відповідають різним значенням початкового відхилення A_0 побудовані на рис. 6.12. Якщо $A_0 = 0$, то теоретично відхилення продовжує залишатись рівним нулю, хоча це положення і нестійке.

Якщо $A_0 \neq 0$, амплітуда коливань зрештою приймає значення $A_0 = 2 / \beta^{1/2}$, зростаючи, якщо A_0 менше цього значення, і зменшуючись, якщо A_0 більше цього значення. У всіх випадках встановлення амплітуди коливань відбувається монотонно, без перерегулювання.

Система такого роду, що самозбуджується і приходить в режим автоколивань внаслідок як завгодно малого випадкового збурення, називається генератором коливань з м'яким режимом збудження. Застосування нелінійних елементів з іншою характеристикою від'ємного опору приводить до схеми генератора з жорстким режимом збудження, що приходить в режим автоколивань лише за умови, що початкове збурення перевищує деякий встановлений рівень.

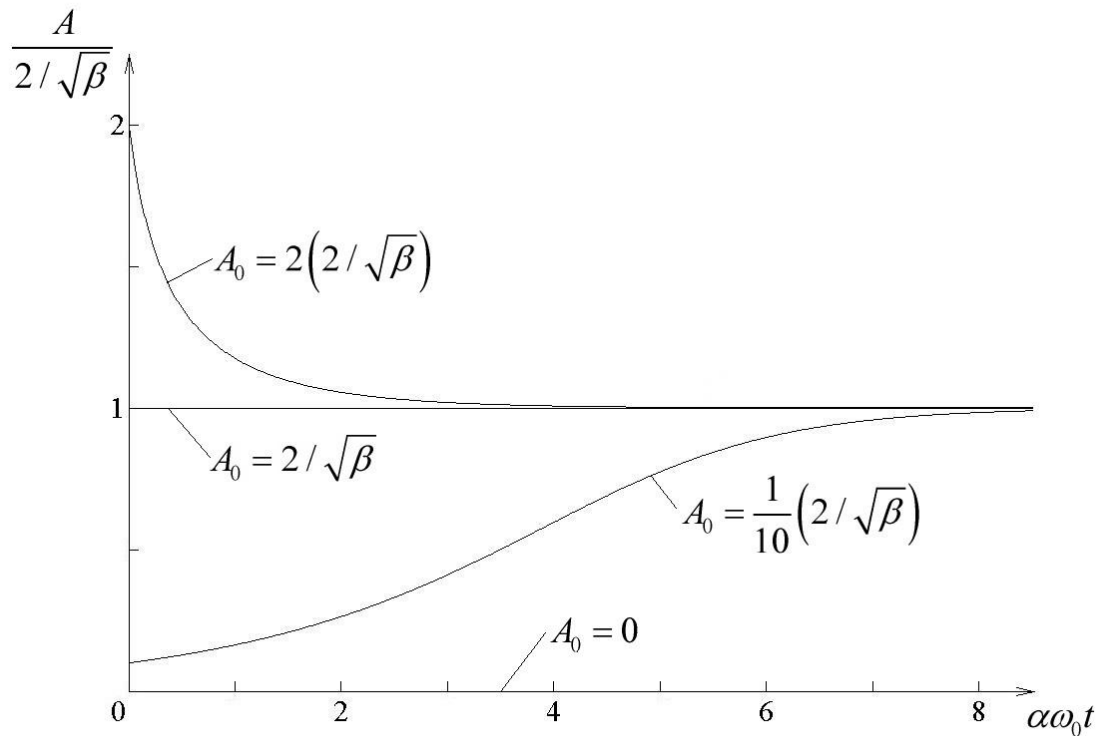


Рис. 6.12. Можливі зміни амплітуди коливань системи, розглянутої в прикладі 7, із зростанням часу

Для того щоб результати застосування методу варіації параметрів були справедливими, необхідно, щоб виконувалась умова $\left| \frac{\dot{A}}{A} \right| \frac{2\pi}{\omega_0} \ll 1$. Якщо амплітуда A збільшується від деякого малого значення, то максимальне значення \dot{A} , тобто $\dot{A}_{\max} = (2\alpha\omega_0 / 3) / (3\beta)^{1/2}$, відповідає значенню $A = 2 / (3\beta)^{1/2}$. З огляду на це $\dot{A}_{\max} / A = \alpha\omega_0 / 3$ і для справедливості цього методу дослідження необхідно, щоб $\alpha \ll 3 / 2\pi \approx 0,47$. За цієї умови перехідний процес наростання амплітуди від деякого малого початкового значення буде містити кілька циклів коливань.

Залежність напруги від часу, яка отримується при застосуванні методу варіації параметрів, в першому наближенні визначається по формулі

$$e(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0),$$

де $A(t)$ задається формулою (6.66), а θ_0 – постійна, яка визначається початковими умовами.

г) *Великі значення α* . Як метод збурень, так і метод варіації параметрів вимагають, щоб параметр α в рівнянні генератора коливань був малим порівняно з одиницею. Якщо $\alpha \ll 1$, напруга по формі близька до синусоїдальної, частота коливань близька до власної частоти контуру, який збуджується, а зміна амплітуди відбувається відносно повільно. Суттєво інший режим роботи генератора має місце, коли параметр α великий. Додаткові відомості можна отримати аналітично.

У першому наближенні режим сталих коливань описується за допомогою методу збурень виразом

$$e = E \cos \omega_0 t + \alpha \frac{E}{8} (3 \sin \omega_0 t - \sin 3\omega_0 t). \quad (6.67)$$

Для випадку $\alpha = 1$ ця залежність графічно зображена на рис. 6.13. Використання наближеного розв'язку при такому великому значенні α не завжди виправдано, проте якісно результати і тут виявляються вірними. Вплив поправочних членів першого порядку позначається у вияві сплющеної, хоча і скошеної, вершини хвилі з більш різкими переходами від додатних значень до від'ємних.

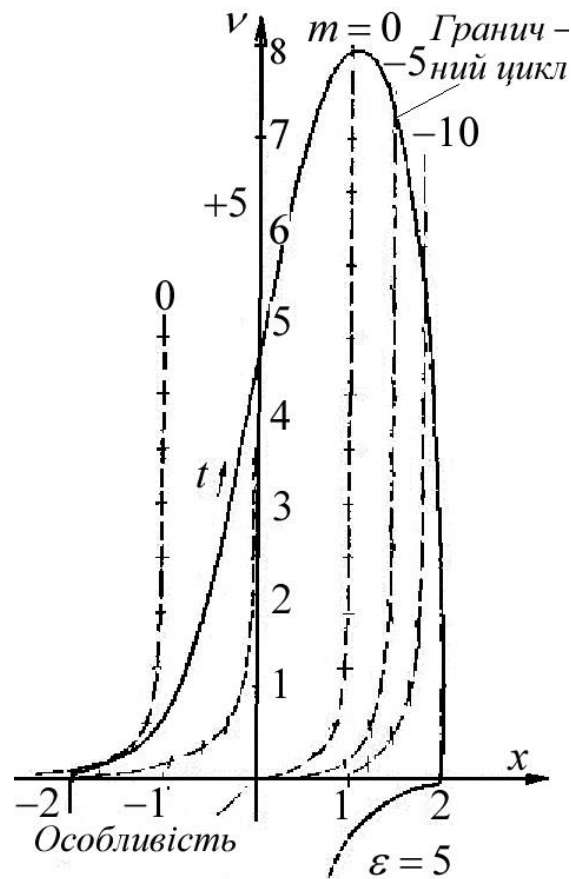


Рис. 6.13. Ізокліни та фазовий портрет для рівняння Ван-дер-Поля при $\varepsilon = 5$. Показана верхня половина фазової площини і граничного циклу.

Чим більше значення α , тим сильніше впливають додаткові члени. Є підстава вважати, що при значеннях параметра α , набагато більших за одиницю, вершини хвиль стануть майже плоскими, хоча і похилими, а перехід – практично миттєвим. На початку і в кінці переходів на кривій з'явиться гострий злом. Цей рисунок співпадає з тим, який можна отримати при дослідженні при дуже великих значеннях ε рівняння Ван дер Поля. Далі, з рис. 6.14, очевидно витікає, що порівняно повільна зміна x має місце, коли величина x зменшується від максимального значення до величини, що відповідає половині цього максимуму. Потім відбувається дуже швидка стрибкоподібна зміна значення x до максимального, але з

протилежним знаком. Ці відомості можна використовувати для подальшого дослідження.

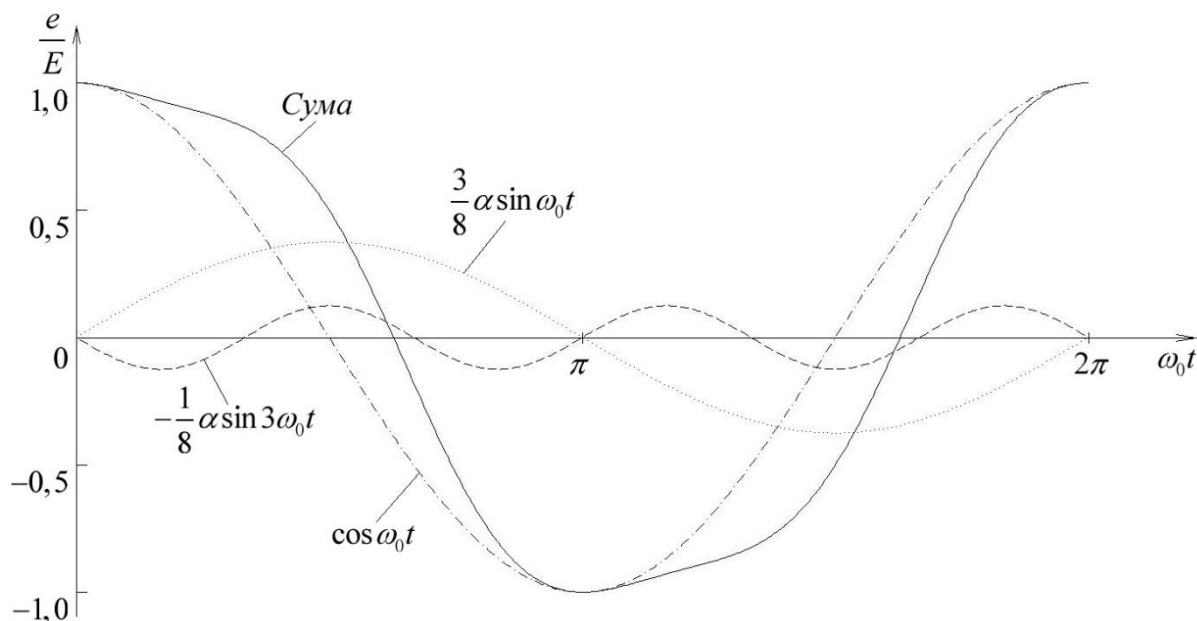


Рис. 6.14. Зміна напруги в контурі (приклад 7), побудована в першому наближенні з урахуванням основної і третьої гармонік; $\alpha = 1$

Якщо графік зміни e складається з практично прямолінійних ділянок, з'єднаних під кутом один до одного, другою похідною \ddot{e} в рівнянні (6.55) можна знехтувати всюди, окрім кутових точок. При цьому рівняння (6.55) перетворюється в

$$-\alpha(1 - \beta e^2)\omega_0 \dot{e} + \omega_0^2 e = 0. \quad (6.68)$$

Змінні можна розділити і про інтегрувати, що дає:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \frac{\omega_0^2 e}{\alpha(1 - \beta e^2)\omega_0} = \frac{\omega_0}{\alpha/e - \alpha\beta e} = \frac{\omega_0}{\alpha(1/e - \beta e)}; \\ de \left[\frac{\alpha}{\omega_0} \left(\frac{1}{e} - \beta e \right) \right] &= dt; \\ \int_0^t dt &= \int_{2/\beta^{1/2}}^e \frac{\alpha}{\omega_0} \left(\frac{1}{e} - \beta e \right) de, \end{aligned} \quad (6.69)$$

де припускається, що максимальне значення $e = 2 / \beta^{1/2}$ відповідає моменту $t = 0$ і інтервал зміни часу дорівнює t . В результаті інтегрування отримаємо:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\alpha}{\omega_0} \left(\ln e \Big|_{2/\beta^{1/2}}^e - \frac{\beta e^2}{2} \Big|_{2/\beta^{1/2}}^e \right) = \\ &= \frac{\alpha}{\omega_0} \left(\ln e - \ln \left(\frac{2}{\beta^{1/2}} \right) - \frac{\beta e^2}{2} + \frac{\beta}{2} \frac{4}{\beta} \right) = \frac{\alpha}{\omega_0} \left(\ln \frac{e \beta^{1/2}}{2} - \frac{\beta e^2}{2} + 2 \right); \\ t &= \frac{\alpha}{\omega_0} \left(\ln \frac{\beta^{1/2} e}{2} - \frac{\beta e^2}{2} + 2 \right). \end{aligned} \quad (6.70)$$

В той момент, коли напруга e зменшується до значення $e = 1 / \beta^{1/2}$, нахил de / dt стає нескінченним: $\dot{e} = \frac{\omega_0}{\alpha(1/e - \beta e)}$, тоді при $1/e - \beta e = 0 \Leftrightarrow 1 = \beta e^2 \Leftrightarrow e = \pm 1 / \beta^{1/2}$ $\dot{e} \rightarrow \infty$ і відбувається перехід до від'ємних значень e .

Внаслідок симетрії характеристики нелінійного від'ємного опору від'ємний полуперіод лише по знаку відрізняється від додатного. Таким чином, інтервал, протягом якого e змінюється від $2 / \beta^{1/2}$ до $1 / \beta^{1/2}$, відповідає половині повного періоду T і вирази (6.69) і (6.70) справедливі лише при $0 \leq t \leq T / 2$. Це твердження ґрунтується на припущенні про те, що переходи відбуваються миттєво, без яких-небудь затрат часу.

Період коливань можна визначити, підставивши умову $e = 1 / \beta^{1/2}$ при $t = T / 2$ в рівняння (6.70), в результаті чого

$$\frac{T}{2} = \frac{\alpha}{\omega_0} \left(\ln \frac{1 / \beta^{1/2} \cdot \beta^{1/2}}{2} - \frac{\beta \cdot 1 / \beta}{2} + 2 \right) = \frac{\alpha}{\omega_0} \left(\ln \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) \approx 0,81 \frac{\alpha}{\omega_0}.$$

Період у випадку $\alpha \ll 1$ наближено визначається по формулі

$$T = 1,62 \frac{\alpha}{\omega_0}. \quad (6.71)$$

Форму коливань можна визначити, побудувавши графік рівняння (6.70) так, як це зроблено на рис. 6.15, де додатна і від'ємна половини циклу співпадають по формі. Коливання цього виду, які наближено відповідають випадку дуже великого α , можна порівняти з зображеннями на рис. 6.14 і отриманими графічно для $\varepsilon=5$. Обидва графіки якісно подібні і відрізняються, по-перше, тим, що зломи графіка, побудованого для $\varepsilon=5$, на такі гострі і переходи відбуваються не настільки миттєво. З цього слід зробити висновок, що для отримання коливань, вигляд яких відповідав би приведеному на рис. 6.15, необхідна значно більша величина параметра α . Рівняння періодів (6.71) дає значення періодів з великою нестачею, якщо α недостатньо велике.

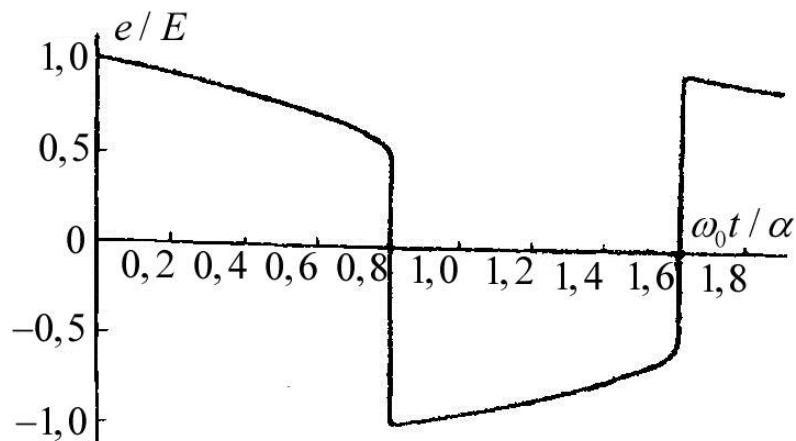


Рис. 6.15. Приблизний характер зміни напруги в контурі в прикладі 7 для дуже великих значень α .

Режим роботи генератора при великих значеннях α називають релаксаційними коливаннями. Вони характеризуються крутим фронтом при переході від одного стану, в якому відбуваються порівняно повільні зміни, до іншого такого стану.

Період релаксаційних коливань згідно формулі (6.71) пропорційний величині $\alpha / \omega_0 = a / C \omega_0^2 = aL$, яка визначається величиною від'ємної

провідності α і одним лише реактивним параметром L . З іншого боку, при $\alpha \ll 1$ період синусоїдальних коливань $T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi(LC)^{1/2}$. Він залежить від параметрів обох реактивних елементів (L і C) і не залежить від величини опорів. Цікаво відзначити, що максимальне значення напруги e залишається тим же $E = \pm 2 / \beta^{1/2}$ як для синусоїдальних так і для релаксаційних коливань.

Можливе і більш точне дослідження, що дозволяє отримати зміну амплітуди E і періоду T в залежності від параметра α . Результати цього аналізу приведені на рис. 6.16 сумісно з результатами, отриманими за допомогою більш простих розглянутих нами прийомів.

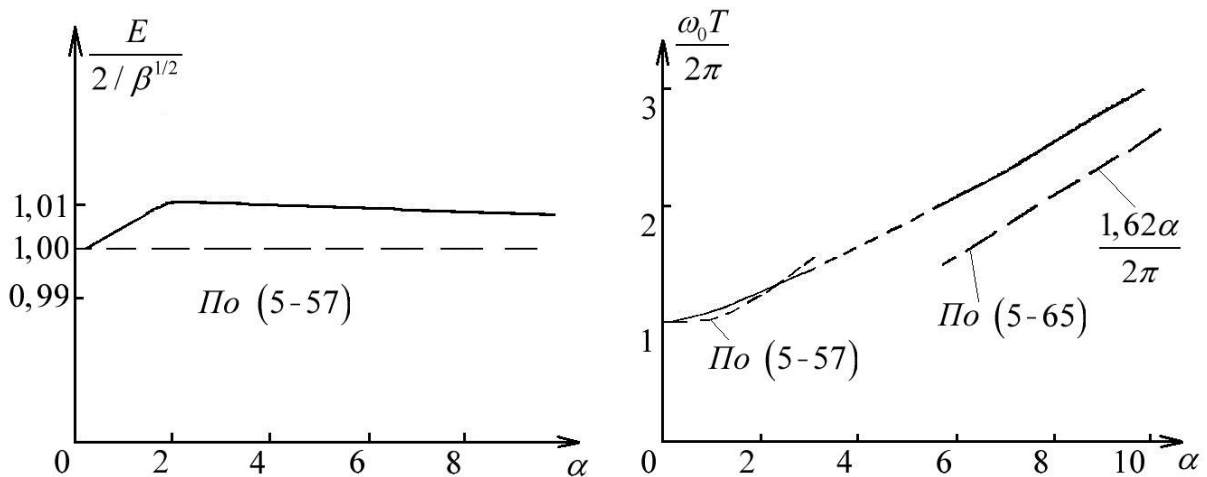


Рис. 6.16. Залежність амплітуди E і періоду T для контуру, який розглядається в прикладі 7, від параметра α . Наведені графіки знайдених наближених залежностей, а також результати більш точного дослідження, виконаного Фішером.

6.6 Методи, які ґрунтуються на оцінці середньої нев'язки

а) Метод Гальоркіна. Дещо інший підхід до питання визначення наближеного розв'язку нелінійного диференціального рівняння заснований на розгляді похибки, яка зветься нев'язкою, і яку отримуємо при підстановці в рівняння наближеного розв'язку. Нелінійне рівняння може бути представлено в загальному вигляді:

$$f(D, x, t) = 0, \quad (6.72)$$

де $f(D, x, t)$ – деяка, взагалі кажучи, нелінійна функція оператора диференціювання $D = d/dt$, залежної змінної x і незалежної змінної t . Вигляд наближеного розв'язку рівняння (6.72) імовірно визначається на підставі тих попередніх відомостей про розв'язок, які можна мати в розпорядженні. Передбачуваний розв'язок повинен містити достатню кількість довільних постійних, щоб можна було задовольнити початкові умови, і додатково ряд параметрів, які слід надалі визначати так, щоб розв'язок став оптимальним в заданому сенсі.

Хоча конкретні подробиці можуть бути дуже різними, представляється раціональним представити розв'язок у вигляді лінійної комбінації належним чином обраних функцій. Іншими словами, розв'язок $x(t)$ апроксимується функцією $X(t)$, що має форму

$$X(t) = \varphi_0(t) + C_1\varphi_1(t) + \dots + C_m\varphi_m(t), \quad (6.73)$$

де $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ – лінійно незалежні функції, характер і число яких вибирається так, щоб апроксимувати розв'язок із заданим ступенем точності. Перша з них φ_0 обирається так, щоб якомога краще апроксимувати розв'язок і задовольнити n початковим умовам, що

відповідають рівнянню n -го порядку. Функція φ_0 аналогічна породжуючому розв'язку, який визначався на першому етапі застосування методу збурень, і також обчислюється з урахуванням початкових умов. Решта функцій $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ являють собою поправки до φ_0 . Початкові умови для цих функцій – нульові, оскільки функція φ_0 враховує будь-які ненульові початкові умови для розв'язку в цілому. Постійні C_1, C_2, \dots, C_m повинні бути визначені так, щоб оптимізувати розв'язок.

Відомо, що передбачуваний розв'язок виявляється досить точним лише на обмеженому інтервалі зміни незалежної змінної. Внаслідок цього необхідно задати інтервал, наприклад $a \leq t \leq b$, в межах якого розв'язок буде застосовуватися. Якщо розв'язок періодичний, то в якості такого інтервалу, ймовірно, буде обраний один період. Якщо розв'язок неперіодичний, вибір цього інтервалу більш довільний.

Вибір функцій, що фігурують в рівнянні (6.73), є найістотнішим в цьому методі розв'язку. Природа цих функцій повинна бути така, щоб сума невеликої їх кількості досить точно апроксимувала розв'язок рівняння. Якщо розглядається складне диференціальне рівняння, ймовірно, що і його розв'язок має бути представлений функціями порівняно складного характеру. З іншого боку, оскільки над сумою функцій (6.73) доведеться виконувати математичні операції, дуже бажано, щоб ці функції були по можливості простими. Очевидно, що деяке знання властивостей розв'язку необхідне для того, щоб забезпечити розумний вибір функцій φ .

Наближений розв'язок (6.73) підставляється в рівняння (6.72) і, оскільки розв'язок не є точним, не може тотожно задовольнити це рівняння. Таким чином, нев'язка $\varepsilon(t)$ може бути визначена рівністю

$$\varepsilon(t) = f[D, X(t), t]. \quad (6.74)$$

Вона є мірою того, наскільки прийнятий нами наближений розв'язок не відповідає запропонованому диференціальному рівнянню. Нев'язка не є, звичайно, прямою різницею між наближеним і точним розв'язками. Точний розв'язок рівняння взагалі залишається невідомим.

Мірою точності наближеного розв'язку слід вважати те, наскільки невязка $\varepsilon(t)$ наближається і залишається близькою до нуля на всьому досліджуваному інтервалі $a \leq t \leq b$. Оскільки невязка ε як при додатних, так і при від'ємних значеннях однаково виражає помилку, її квадрат ε^2 є більш зручною і простою мірою похибки. Далі, інтеграл

$$J = \int_a^b \varepsilon^2(t) dt \quad (6.75)$$

може служити середньою мірою похибки уздовж всього інтервалу. Критерієм точності можна вважати умову мінімуму інтеграла J . Така оцінка випливає з принципу найменших квадратів, часто використовуваного для визначення значень небагатьох постійних, що входять в емпіричну формулу, з тим, щоб ця формула оптимальним чином відповідала великій кількості різних експериментальних точок.

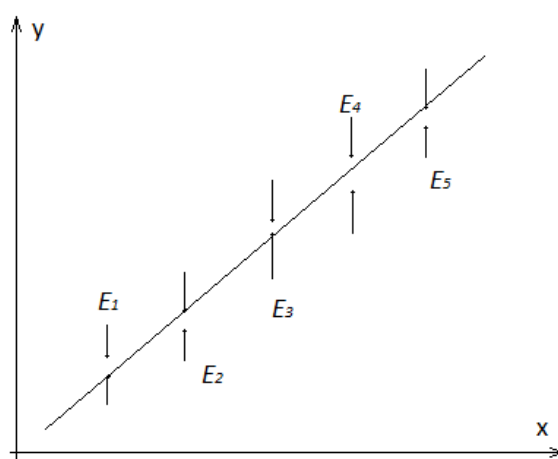


Рис. 6.17. Апроксимація експериментальної залежності прямою лінією методом найменших квадратів.

Принцип найменших квадратів можна застосувати, наприклад, до задачі, зображеної на рис. 6.17. На рисунку представлені п'ять експериментально знайдених значень деякої величини y , яка теоретично повинна бути лінійною функцією іншої величини x . Бажано вибрати оптимальне значення постійних C_1 і C_2 , що входять до лінійного рівняння $y = C_1x + C_2$. Це можна зробити, визначивши п'ять величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_5$ у вигляді різниць між експериментальними значеннями y і відповідними значеннями, знайденими за допомогою оптимальної лінійної залежності.

Потім вимагають, щоб сума $\sum_{i=1}^5 \varepsilon_i^2$ була мінімальною. Якщо мова йде про неперервні функції, а не про дискретні точки, суму слід замінити інтегралом.

Застосування цього принципу до розв'язання диференціальних рівнянь відоме як метод Гальоркіна.

У наближеному розв'язку (6.73) слід визначити постійні C_1, C_2, \dots, C_m . Вони фігурують у виразі нев'язки $\varepsilon(t)$ і, отже, в інтегралі J . Для мінімізації J , очевидно необхідно, щоб виконувалися рівності

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial C_1} &= \int_a^b 2\varepsilon(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial C_1} dt = 0 \\ &\dots \\ \frac{\partial J}{\partial C_m} &= \int_a^b 2\varepsilon(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial C_m} dt = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.76)$$

Можливо, звичайно, що ці умови приведуть до визначення максимального, а не мінімального значення $\varepsilon(t)$. Зазвичай можна без зусиль перевірити, максимум або мінімум має місце. Остаточна перевірка

полягає в тому, що в точці мінімуму другі похідні від J додатні, тоді як перші дорівнюють нулю. Постійні C_1, C_2, \dots, C_m вибираються так, щоб задовольнити систему (6.76). Необхідні обчислення виявляються порівняно простими у разі розв'язку лінійних диференціальних рівнянь. Нелінійні рівняння, однак, як правило, призводять до істотної складності обчислень.

Приклад 8. Нелінійний осцилятор

Рух тіла постійної маси, укріпленого за допомогою нелінійної пружини, вже розглядався в попередніх прикладах. Він описується рівнянням

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + hx^3 = 0 \quad (6.77)$$

з початковими умовами $x = A, \dot{x} = 0$ при $t = 0$. Знайти наближений розв'язок методом Гальоркіна.

Відомо, що рівняння (6.77) має періодичний розв'язок, близький до простих гармонійних коливань, якщо нелінійний доданок порівняно невеликий. Тому наближений розв'язок можна шукати у вигляді

$$x = \varphi_0(t) = A \cos \omega t. \quad (6.78)$$

Цей вираз відповідає (6.73) за умови, що для апроксимації рішення береться лише одна єдина функція. Вона задовольняє початковим умовам, але містить невідому кругову частоту ω . Її значення може бути знайдене за допомогою методу Гальоркіна, незважаючи на те, що поправка не виступає в ролі окремого доданка. Хід розв'язку в цьому випадку аналогічний тому, який має місце при застосуванні методу збурень до коливальних систем, коли з'являються вікові члени.

$$x^3 = A^3 \cos^3 \omega t;$$

$$\dot{x} = -\omega A \sin \omega t ;$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \cos \omega t ;$$

$$\varepsilon = -\omega^2 A \cos \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t + hA^3 \cos^3 \omega t ;$$

$$\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta ;$$

Нев'язка рівняння (6.77), що відповідає функції (6.78), має вигляд

$$\varepsilon = \left(-\omega^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3hA^3}{4} \right) \cos \omega t + \frac{hA^3}{4} \cos 3\omega t . \quad (6.79)$$

Для того, щоб мінімізувати інтеграл J , необхідно задовольнити співвідношення

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial A} d(\omega t) = 0 . \quad (6.80)$$

Оскільки розв'язок періодичний, природно вести апроксимацію протягом повного періоду, зробивши інтегрування в межах $0 \leq \omega t \leq 2\pi$. Слід визначити залежність, що пов'язує величини ω і A в наближеному розв'язку, що може бути виконано шляхом диференціювання ε по A . В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left[\left(-\omega^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3hA^3}{4} \right) \cos \omega t + \frac{hA^3}{4} \cos 3\omega t \right] \times \\ & \times \left[\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{9hA^2}{4} \right) \cos \omega t + \frac{3hA^2}{4} \cos 3\omega t \right] d(\omega t) = 0 ; \\ & -\omega^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3hA^3}{4} \equiv A ; \quad -\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{9hA^2}{4} \equiv B ; \quad \frac{hA^3}{4} \equiv C ; \quad \frac{3hA^2}{4} \equiv D ; \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(AB \cos^2 \omega t + CB \cos 3\omega t \cos \omega t + AD \cos 3\omega t \cos \omega t + CD \cos^2 3\omega t \right) d(\omega t) = 0 .$$

Для того, щоб виконувалась умова мінімуму, необхідно

$$\left(-\omega^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3hA^3}{4}\right)\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{9hA^2}{4}\right) + \left(\frac{hA^3}{4}\right)\left(\frac{3hA^2}{4}\right) = 0.$$

Отже, або $A = 0$, що тривіально, або

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{3hA^3}{4}(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{9hA^3}{4}(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{27h^2A^5}{16} + \frac{3h^2A^5}{16} = 0;$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 3hA^2(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{15h^2A^4}{8} = 0.$$

В результаті розв'язання цього квадратного рівняння отримаємо:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = -\frac{3hA^2}{2} \pm \sqrt{\frac{9h^2A^4}{4} - \frac{15h^2A^4}{8}} = -\frac{3hA^2}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{8}}hA^2;$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 = -hA^2 \left(\frac{3 \pm \sqrt{1,5}}{2} \right) = -hA^2 \left(\frac{3 \pm 1,22}{2} \right);$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + khA^2; \quad k_1 = 0,89; \quad k_2 = 2,11.$$

Визначити, яке з цих значень k мінімізує інтеграл, можна наступним чином. Запишемо отримане співвідношення у вигляді $(\omega^2 - \omega_0^2) / kh = A^2$. Крім двох значень k , що визначаються коренями квадратного рівняння, третє можливе значення цієї константи відповідає нульовому значенню A і, отже, має бути нескінченно велике. Можна припустити, що значення інтеграла J є безперервною функцією змінної k з мінімумами і максимумами, що чергуються. Можливо, звичайно, хоча і мало ймовірно, що похідна від J може перетворитися в нуль в такій точці, де сама функція не досягає ні максимального, ні мінімального значення, і в цьому випадку передбачуване чергування максимумів і мінімумів не матиме місця. Тут же при $k = \infty$ і $A = 0$ ε також дорівнює нулю і інтеграл J , очевидно, мінімальний. Зі зменшенням k від нескінченності до наступного критичного значення 2,11 інтеграл J зростає і досягає максимального

значення при $k = 2,11$. Нарешті, якщо k далі зменшується до 0,89, значення інтеграла J має стати мінімальним. Це значення k , очевидно, і є єдиним розв'язком задачі. Звідси випливає, що оптимальне значення параметра ω в наближеному розв'язку рівняння (6.77) визначається за формулою

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 0,89hA^2. \quad (6.81)$$

Цей вираз можна порівняти з результатами, отриманими в прикладах 3 і 5, де величина, відповідна постійній k , дорівнювала 0,75.

За допомогою цього методу можна було б отримати більш точний розв'язок, якщо використовувати дві складові: гармоніку основної частоти і третю косинусну гармоніку замість однієї лише компоненти, залишеної у виразі (6.78). Однак введення додаткової складової надто ускладнює дослідження.

Приклад 9. Розряд конденсатора на діод

Електричне коло, яке складається з конденсатора, який розряджається на діод з нелінійною характеристикою описується рівнянням

$$\dot{e} + Ae + Be^2 = 0, \quad (6.82)$$

причому $e = E$, коли $t = 0$. Знайти наближений розв'язок методом Гальоркіна.

Точним розв'язком рівняння, з відсутньою нелінійною складовою ($B = 0$), є експонента $e = Ee^{-At}$. Цю функцію доцільно використовувати в якості першого члена φ_0 в наближеному розв'язку. Далі слід розумно вибрати вид поправочних членів. У зв'язку з обчислювальними складнощами, розглянемо лише перший поправочний член φ_1 . Цей доданок має бути вбраний так, щоб він дорівнював нулю як в початковій

момент $t=0$, так і при нескінченному рості часу, що забезпечує правильність початкового та кінцевого значення e . Можливою поправкою, що володіє цією властивістю, є функція te^{-At} . Слід зазначити, що це лише одна з багатьох можливих форм поправочного члена. Зокрема, вибір показника $-At$ цілком довільний. У будь-якому випадку можливий вигляд наближеного розв'язку рівняння (6.82)

$$e = Ee^{-At} + kte^{-At}, \quad (6.83)$$

де k – множник, який може бути визначений за допомогою методу Гальоркіна.

Підставивши (6.83) в (6.82) отримаємо нев'язку

$$\begin{aligned} \dot{e} &= -EAe^{-At} + ke^{-At} - ktAe^{-At}; \\ e^2 &= E^2e^{-2At} + 2Ekte^{-2At} + k^2t^2e^{-2At}; \\ e &= -EAe^{-At} + ke^{-At} - ktAe^{-At} + AEe^{-At} + ktAe^{-At} + \\ &+ BE^2e^{-2At} + 2BEkte^{-2At} + Bk^2t^2e^{-2At}; \\ e &= ke^{-At} + e^{-2At}(BE^2 + 2BEkt + Bk^2t^2); \\ e &= ke^{-At} + B(E + kt)^2e^{-2At}, \end{aligned} \quad (6.84)$$

частинна похідна якої по k

$$\frac{\partial e}{\partial k} = e^{-At} + 2Bt(E + kt)e^{-2At}. \quad (6.85)$$

Необхідно визначити множник k так, щоб задовольнялась умова

$$\int_0^{\infty} e \frac{\partial e}{\partial k} dt = 0, \quad (6.86)$$

в якій межі інтегрування довільно вибрані так, щоб охопити всі можливі додатні значення часу.

Інтегрування може бути виконано після підстановки (6.84) і (6.85) в (6.86). Для цього методу характерно те, що навіть при його застосуванні до

таких порівняно простих рівнянь як (6.82), розрахунок інтегралу виходить доволі складним.

$$\int_0^{\infty} \left[k e^{-At} + B e^{-2At} (E + kt)^2 \right] \cdot \left[e^{-At} + 2B t e^{-2At} (E + kt) \right] dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left[k e^{-2At} + B e^{-3At} (E + kt)^2 + 2B t k e^{-3At} (E + kt) + 2B^2 t e^{-4At} (E + kt)^3 \right] dt = 0.$$

В результаті отримуємо складне кубічне рівняння для знаходження k , яке не може бути розв'язане в загальному вигляді але дозволяє знайти числове значення шуканого множника для конкретно заданих значень параметрів.

Ця задача розглядається в прикладі 11 з допомогою більш детального, але простішого методу Рітца, і її розв'язок доводиться до кінця.

Приклад 10. Осцилятор з квадратичною характеристикою

У попередньому прикладі розглядалася пружина, відновлююча сила якої пов'язана з відхиленням залежністю, що містить лінійний доданок третього степеня. Можна розглянути пружину, у якої сила буде залежати лише від квадрата відхилення, причому лінійний член відсутній, а сила завжди спрямована в бік зменшення відхилення. Рух постійної маси, що утримується за допомогою подібної пружини, описується рівнянням.

$$\ddot{x} + a^2 x |x| = 0, \quad (6.87)$$

де a^2 – додатна постійна, що визначається величиною маси та фізичними параметрами пружини.

Оскільки рівняння (6.87) не містить лінійного члена, розв'язання за допомогою методу варіації параметрів виявляється неможливим. Знайти

наближений розв'язок, що задовольняє початковим умовам $x = A$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$.

Можна припустити, що система виявиться коливальною і шукати наближений розв'язок у вигляді

$$x = \varphi_0(t) = A \cos \omega t. \quad (6.88)$$

Підстановка в рівняння (6.74) визначає нев'язку

$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t; \quad \ddot{x} = -\omega^2 A \cos \omega t;$$

$$\varepsilon = -\omega^2 A \cos \omega t \pm a^2 A^2 \cos^2 \omega t,$$

де знак плюс відповідає інтервалу $-\pi/2 \leq \omega t \leq \pi/2$, а знак мінус – інтервалу $\pi/2 \leq \omega t \leq 3\pi/2$. Умова, яка повинна бути виконана, має вигляд

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial A} d(\omega t) = 0,$$

причому інтегрування може проводитися лише протягом половини періоду, оскільки обидва напівперіоди симетричні. Виписавши підінтегральну функцію в явному вигляді, отримаємо:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A} = -\omega^2 \cos \omega t \pm 2a^2 A \cos^2 \omega t;$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\omega^2 A \cos \omega t + a^2 A^2 \cos^2 \omega t) (-\omega^2 \cos \omega t \pm 2a^2 A \cos^2 \omega t) d(\omega t) = 0,$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\omega^4 A \cos^2 \omega t - a^2 A^2 \omega^2 \cos^3 \omega t -$$

$$-2a^2 A^2 \omega^2 \cos^3 \omega t + 2a^4 A^3 \cos^4 \omega t) d(\omega t) = 0;$$

$$\text{Вичислюємо інтеграли: } \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx; \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx;$$

$$\text{Покладемо } I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx;$$

Розкладемо інтеграл по частинах:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x - \sin x dx = - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot d \cos x = \\
 &= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot (n-1) \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x dx = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x = \\
 &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) dx = \\
 &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) \cdot I_n; \\
 I_n &= (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) \cdot I_n \\
 I_n &= \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}.
 \end{aligned}$$

1. $n = 2k$ – парне

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot I_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)} \cdot I_{2k-4} = \dots = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot I_0;$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2};$$

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2}.$$

$n = 2k + 1$ – непарне

$$I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 5 \cdot 3} \cdot I_1;$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1;$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 5 \cdot 3};$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx ;$$

$$\frac{\pi}{2} - x = t ; x = \frac{\pi}{2} - t ;$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} x dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} ;$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1} x dx = \frac{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 5 \cdot 3} .$$

Тоді інтеграл прийме вигляд

$$\frac{\pi}{2} \omega^4 A - 3a^2 A^2 \omega^2 \frac{2}{3} + 2a^4 A^3 \frac{3}{8} \frac{\pi}{2} = 0 ;$$

$$\omega^4 - \frac{8}{\pi} a^2 A \omega^2 + \frac{3}{2} a^4 A^2 = 0 ;$$

$$\omega^4 = N^2 ; N^2 - N \left(\frac{8}{\pi} a^2 A \right) + \frac{3}{2} a^4 A^2 = 0 ;$$

$$N = \frac{4}{\pi} a^2 A \pm \sqrt{\frac{16}{\pi^2} a^4 A^2 - \frac{3}{2} a^4 A^2} = a^2 A \left(\frac{4}{\pi} \pm \sqrt{\frac{16}{\pi^2} - \frac{3}{2}} \right) ;$$

Тоді умова

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial A} d(\omega t) = 0$$

може бути виконана або в тривіальному випадку $A = 0$, або за умови

$$\omega^2 = k a^2 A ; k_1 = 0,92 ; k_2 = 1,62 ;$$

За допомогою міркувань, аналогічних наведеним у попередньому прикладі, можна показати, що мінімум інтеграла J відповідає випадку $k = 0,92$.

$$\omega^2 = 0,92 a^2 A . \quad (6.89)$$

б) *Метод Рунца*. Вище було показано, що, якщо $f(D, x, t) = 0$ – нелінійне рівняння, то точний розв’язок цього рівняння $x(t)$ апроксимується функцією $X(t)$:

$$X(t) = \varphi_0(t) + C_1 \varphi_1(t) + \dots + C_m \varphi_m(t) \quad (6.90)$$

де $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ – лінійно незалежні функції.

Тоді нев’язка дорівнює

$$\varepsilon = f(D, X(t), t), \quad (6.91)$$

$$J = \int_a^b \varepsilon^2(t) dt \quad (6.92)$$

— міра середньої похибки по інтервалу, причому інтеграл повинен бути мінімальним. Для його мінімізації необхідно, щоб

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial C_1} &= \int_a^b 2\varepsilon(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial C_1} dt = 0 \\ &\dots \\ \frac{\partial J}{\partial C_m} &= \int_a^b 2\varepsilon(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial C_m} dt = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.93)$$

звідки визначають C_1, \dots, C_m .

При відомих умовах можна показати, що система (6.93), що визначає мінімум інтеграла J , заданого виразом (6.92), еквівалентна спрощеній системі рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \varepsilon(t) \varphi_1(t) dt &= 0 \\ &\dots \\ \int_a^b \varepsilon(t) \varphi_m(t) dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.94)$$

де $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ – функції, що входять до передбачуваного розв’язку (6.90). Еквівалентність систем (6.93) і (6.94) має місце, якщо вихідне диференціальне рівняння (6.71) лінійне і якщо функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ ортогональні на відріжку $a \leq t \leq b$. Ортогональність функцій характеризується тим, що

$$\int_a^b \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt \begin{cases} = 0, \text{ якщо } i \neq j \\ \neq 0, \text{ якщо } i = j \end{cases}$$

Зазвичай систему рівнянь (6.94) значно легше застосувати, ніж систему (6.93), і тому ці умови часто використовуються при розв’язанні нелінійних рівнянь. Розв’язок, що отримують у такий спосіб, дещо відрізняється від отриманого шляхом мінімізації інтеграла J .

Цей дещо більш простий спосіб відомий під назвою метода Рітца. Для лінійних рівнянь він співпадає з методом Гальоркіна, але для нелінійних дещо відрізняється від нього.

Доцільність застосування системи рівнянь (6.94) при дослідженні осцилятора можна обґрунтувати, виходячи з фізичних міркувань. Якщо розглядати рівняння $M\ddot{x} + f(\dot{x}, x) = F(t)$ як рівняння руху механічного осцилятора, то змінна x виражає переміщення, а всі складові рівняння відповідають силам. Якщо $F(t)$ – періодичне зовнішнє збурення, що діє на демпфований осцилятор, або якщо $F(t)$ дорівнює нулю і демпфування відсутнє, то в усталеному режимі система виконує періодичні коливання. При цьому переміщення може бути приблизно представлено скінченною сумою вигляду

$$x \approx X(t) = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \cos 2\omega_1 t + \dots + C_m \cos m\omega_1 t.$$

Підставивши цей наближений розв’язок в диференційне рівняння, можна визначити нев’язку ε . Вона має розмірність сили і може

розглядатися як надлишкове зусилля, що виникає в кожному моменті циклу коливань внаслідок похибки, що вноситься наближеним розв'язком. Добуток цього зусилля на переміщення x має розмірність роботи і може розглядатися в якості надлишкової роботи, що виконується системою. Логічно вимагати, щоб інтеграл надлишкової роботи за повний цикл дорівнював нулю. В математичному записі ця вимога виражається рівністю

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon(t) X(t) d(\omega_1 t) = 0.$$

Оскільки $X(t)$ являє собою суму косинусних гармонічних компонент, які в межах інтегрування ортогональні, це рівняння може бути представлено у вигляді незалежних рівнянь системи (6.94).

Метод Рітца можна обґрунтувати ще й так. Припустимо, що вихідне рівняння може бути записано в формі

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

де $F(x, \dot{x}, t)$ – деяка функція, періодична по t з періодом T .

Це рівняння можна розглядати як рівняння Ейлера для задачі про мінімум інтеграла $\int_0^T F(x, \dot{x}, t) dt$. Функція $F(x, \dot{x}, t)$ аналогічна функції

Лагранжа для механічної системи, а інтеграл $\int_0^T F(x, \dot{x}, t) dt$ аналогічний інтегралу Гамільтона; в силу принципу Гамільтона цей інтеграл повинен приймати мінімальне значення, якщо $x(t)$ – розв'язок рівняння руху

системи, тобто рівняння $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Будемо шукати мінімум

інтеграла $\int_0^T F(x, \dot{x}, t) dt$ на функціях вигляду

$$X(t) = \sum_{k=1}^m C_k \varphi_k(t),$$

де $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ — періодичні функції з періодом T , ортогональні на відрітку $0 \leq t \leq T$.

Це приводить до системи рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial C_k} \int_0^T F(X, \dot{X}, t) dt = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

яка в більш детальному записі має вигляд

$$\int_0^T \left[\frac{\partial F}{\partial x} \varphi_k(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{\varphi}_k(t) \right]_{[x=X(t), \dot{x}=\dot{X}(t)]} dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Інтегруючи частинами другу складову, отримаємо:

$$\int_0^T \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right]_{[x=X(t), \dot{x}=\dot{X}(t)]} \varphi_k(t) dt = 0,$$

тобто

$$\int_0^T \varepsilon(t) \varphi_k(t) dt = 0,$$

що співпадає з рівняннями (6.94) методу Рітца.

Нарешті, можна розглядати функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ у виразі (6.94) розв'язку за методом Рітца як вагові функції. Перший множник ε у виразі, що інтегрується, слугує мірою похибки. Множення на функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ перед інтегруванням надає певну вагу миттєвому значенню помилки розв'язку. Це дає можливість врахувати більший вплив помилки,

оцінюваної за допомогою ε , в ті моменти, коли значення функцій $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ великі.

Приклад 11. Розрядження конденсатора на діод

Електричне коло, що складається з конденсатора, який розряджається на нелінійний діод, розглядалось в прикладах 1, 4 та 9. Його рівняння:

$$\dot{e} + Ae + Be^2 = 0,$$

причому $e = E$ при $t = 0$. Знайти наближений розв'язок за допомогою методу Рітца.

В прикладі 9 розв'язок шукали у вигляді

$$e = \varphi_0 + k\varphi_1 = Ee^{-At} + kte^{-At};$$

при цьому виходить нев'язка

$$\varepsilon = ke^{-At} + B(E + kt)^2 e^{-2At}.$$

Рівняння для визначення параметра k , складене за методом Рітца, має вигляд

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varepsilon \varphi_1 dt &= \int_0^\infty \left[kte^{-2At} + Bt(E + kt)^2 e^{-3At} \right] dt = 0. \\ \int_0^\infty kte^{-2At} + Bte^{-3At} [E^2 + 2Ekt + k^2 t^2] dt &= \\ = \int_0^\infty [kte^{-2At} + BE^2 te^{-3At} + 2EBkt^2 e^{-3At} + Bk^2 t^3 e^{-3At}] dt &= 0; \end{aligned}$$

$$1) \quad k \int_0^\infty te^{-2At} dt = \frac{k}{4A^2};$$

$$u = t; \quad du = dt; \quad dv = e^{-2At} dt; \quad v = \frac{e^{-2At}}{-2A};$$

$$t \frac{e^{-2At}}{-2A} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-2At}}{2A} dt = -\frac{1}{2A}(0) + \frac{1}{2A} \cdot \frac{e^{-2At}}{-2A} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{4A^2} \cdot e^{-2At} \Big|_0^\infty = \frac{1}{4A^2};$$

$$2) \quad BE^2 \int_0^\infty t e^{-3t} dt = BE^2 \frac{1}{9A^2};$$

$$u = t; \quad du = dt; \quad dv = e^{-3At} dt; \quad v = \frac{e^{-3At}}{-3A};$$

$$\frac{t e^{-3At}}{-3A} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{3A} e^{-3At} dt = -\frac{1}{9A^2} e^{-3At} \Big|_0^\infty = \frac{1}{9A^2};$$

$$3) \quad 2EBk \int_0^\infty t^2 e^{-3At} dt = 2EBk \frac{2}{27A^3};$$

$$u = t^2; \quad du = 2t dt; \quad dv = e^{-3At}; \quad v = \frac{e^{-3At}}{-3A};$$

$$\frac{t^2 e^{-3At}}{-3A} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{3A} e^{-3At} 2t dt = \frac{2}{3A} \int_0^\infty t e^{-3At} dt = \frac{2}{3A} \frac{1}{9A^2} = \frac{2}{27A^3};$$

$$4) \quad Bk^2 \int_0^\infty t^3 e^{-3At} dt = Bk^2;$$

$$u = t^3; \quad du = 3t^2 dt; \quad dv = e^{-3At}; \quad v = \frac{e^{-3At}}{-3A};$$

$$\frac{t^3 e^{-3At}}{-3A} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-3At}}{3A} 3t^2 dt = \frac{1}{A} \int_0^\infty t^2 e^{-3At} dt = \frac{1}{A} \frac{2}{27A^3} = \frac{2}{27A^4};$$

$$\frac{2B}{27A^4} k^2 + k \left[\frac{1}{4A^2} + \frac{4}{27} \frac{EB}{A^3} \right] + \frac{BE^2}{9A^2} = 0;$$

$$\frac{2B}{27A^2} k^2 + k \left[\frac{1}{4} + \frac{4}{27} \frac{EB}{A} \right] + \frac{BE^2}{9} = 0.$$

В прикладі 1 досліджувався частковий випадок $BE / A = 1/2$.

Досліджуючи той же випадок в даному прикладі і ввівши безрозмірний параметр K , що визначається як $K = k / AE$, перетворимо рівняння (5-85)

$$\frac{2}{27} \frac{B}{A^2} A^2 E^2 K^2 + KAE \frac{35}{4 \cdot 27} + \frac{BE^2}{9} = 0;$$

$$\frac{2}{27} BE^2 K^2 + KAE \frac{35}{4 \cdot 27} + \frac{BE^2}{9} = 0;$$

$$8BE^2 K^2 + 35KAE + 12BE^2 = 0;$$

$$8K^2 + 35K \frac{AE}{BE^2} + 12 = 0 \quad (BE / A = 1/2);$$

$$4K^2 + 35K + 6 = 0;$$

$$K_{1,2} = -\frac{35}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 6} = -17,5 \pm 17,33;$$

$$K_1 = -34,83; K_2 = -0,172.$$

Перший корінь можна опустити, оскільки його значення занадто велике для вирішення поставленої задачі, і, відповідно, необхідне значення k визначається як $k = -0,172AE$. Отже, наближений розв'язок можна записати у вигляді

$$e = Ee^{-At} + kte^{-At} = Ee^{-At} [1 - 0,172At]. \quad (6.95)$$

Графік цього виразу наведений на рис. 6.18 спільно з графіком точного розв'язку, отриманого в прикладі 1. Як видно, збіг розв'язків досить хороший, хоч і не настільки близький, як отриманий для зображеного на рис. 6.4 розв'язку, отриманого методом збурень і доведеного до другого наближення. Однак слід мати на увазі, що вираз (6.95) значно простіший, ніж (6.12).

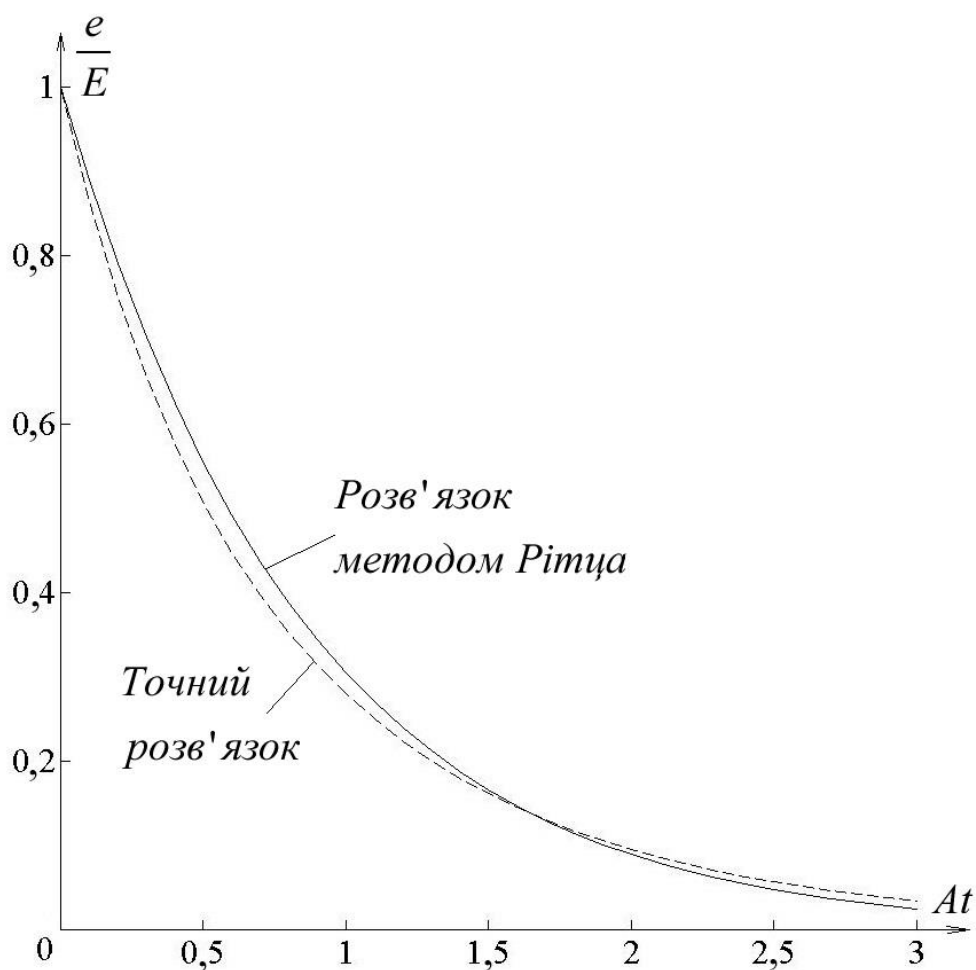


Рис. 6.18. Порівняння точного розв'язку прикладу 11 з наближеним розв'язком, визначеним методом Рунге

Приклад 12. Нелінійний осцилятор

Рух тіла, що утримується нелінійною пружиною, описується наступним рівнянням:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + hx^3 = 0,$$

початкові умови $x = A$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$.

Знайти наближений розв'язок методом Рунге. Відомо, що розв'язок періодичний і не надто відрізняється від простих гармонічних коливань,

якщо нелінійний доданок малий. Рівняння може бути проінтегроване, якщо обидві частини помножити на $2\left(\frac{dx}{dt}\right)dt = 2dx$:

$$\int 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt = -\int 2\omega_0^2 x dx + 2hx^3 dx;$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\omega_0^2 x^2 - \frac{h}{2}x^4 + C;$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega_0^2 x^2 + \frac{h}{2}x^4 = C;$$

для будь-якого розв'язку рівняння.

Перший член наближеного розв'язку можна визначити як

$$x = \varphi_0 = A \cos \omega t,$$

що задовольняє початковим умовам.

Дія нелінійності проявляється в спотворенні розв'язку порівняно з простими гармонічними коливаннями. Характер диференціального рівняння такий, що його розв'язок повинен бути парною функцією змінної t . Крім того, розв'язок повинен бути непарно симетричним відносно точки $t = \frac{T}{4}$, де T – період (обидві ці властивості розв'язку неважко встановити,

якщо скористатися відношенням $(\dot{x})^2 + \omega_0^2 x^2 + \frac{h}{2}x^4 = \text{const}$, яке справедливе для будь-якого розв'язку рівняння, що розглядається). Тому розклад в ряд Фур'є містить лише косинуси непарних гармонік. Отже, поправку можна взяти у вигляді косинуса потрійної частоти. Додаючи таку поправку, ми повинні змінити амплітуду основної гармоніки так, щоб сума відповідала заданим початковим умовам. Цю зміну амплітуди можна розглядати в вигляді ще одного поправочного доданка основної частоти і записати наближений розв'язок, що включає третю гармоніку в вигляді

$$x = \varphi_0 + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 = A \cos \omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 3\omega t,$$

де C_1 і C_2 – постійні.

Для відповідності початковим умовам необхідно:

$$t = 0; x = A; A = A + C_1 + C_2; C_1 = -C_2;$$

$$\dot{x} = 0; 0 = -\omega A \sin \omega t - C_1 \omega \sin \omega t - 3\omega C_2 \sin 3\omega t.$$

Якщо для єдності позначень покласти $A_3 = C_2$ і $A_1 = A - A_3$, то наближений розв'язок прийме вигляд:

$$x = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t; \quad (6.96)$$

$$\dot{x} = -\omega A_1 \sin \omega t - 3\omega A_3 \sin 3\omega t;$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 A_1 \cos \omega t - 9\omega^2 A_3 \cos 3\omega t.$$

Нев'язку можна знайти, підставивши очікуваний розв'язок (6.96) в початкове рівняння. Вона дорівнює:

$$\varepsilon = [-\omega^2 A_1 \cos \omega t - 9\omega^2 A_3 \cos 3\omega t + \omega_0^2 A_1 \cos \omega t + \omega_0^2 A_3 \cos 3\omega t + h(A_1^3 \cos^3 \omega t + A_3^3 \cos^3 3\omega t + 3A_1^2 \cos^2 \omega t \cdot A_3 \cos 3\omega t + 3A_1 \cos \omega t \cdot A_3^2 \cos^2 3\omega t)].$$

Оскільки очікуване рішення складається з двох складових, застосування методу Рітца приводить до двох рівнянь. Вони мають вигляд:

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon \varphi_1 d(\omega t) = 0; \int_0^{2\pi} \varepsilon \varphi_2 d(\omega t) = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon \varphi_1 d(\omega t) = \int_0^{2\pi} \varepsilon \cos \omega t \cdot d(\omega t) = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon \varphi_1 d(\omega t) = \int_0^{2\pi} \left[\left(-\omega^2 A_1 + \omega_0^2 A_1 + \frac{3hA_1^3}{4} + \frac{3hA_1^2 A_3}{4} + \frac{3hA_1 A_3^2}{2} \right) \cos \omega t + \dots \right] \times$$

$$\times \cos \omega t d(\omega t) = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon \varphi_2 d(\omega t) = \int_0^{2\pi} \left[\left(-9\omega^2 A_3 + \omega_0^2 A_3 + \frac{hA_1^3}{4} + \frac{3hA_3^3}{4} + \frac{3hA_1^3 A_3}{2} \right) \cos 3\omega t + \dots \right] \times$$

$$\times \cos 3\omega t d(\omega t) = 0.$$

В підінтегральну функцію вписані лише ті доданки, які дають після інтегрування значення, відмінні від нуля. Отже, систему алгебраїчних рівнянь, яку необхідно розв'язати для визначення залежності між A_1 , A_3 і ω , отримаємо, прирівнявши нулю суми, що стоять в круглих дужках під цими інтегралами, з урахуванням залежності $A_1 + A_3 = A$, де A – початкове значення x :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t \cdot d(\omega t) = \pi; \int_0^{2\pi} \cos^2 3\omega t d(\omega t) = \frac{\pi}{3}.$$

$$1. A_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}hA_1^3 + \frac{3}{4}hA_3A_1^2 + \frac{3}{2}hA_1A_3^2 = 0.$$

$$2. A_3(\omega_0^2 - 9\omega^2) + \frac{1}{4}hA_1^3 + \frac{3}{4}hA_3^3 + \frac{3}{2}hA_1^2A_3 = 0.$$

Ці рівняння містять третій степінь A_1 і A_3 і їх алгебраїчний розв'язок в загальному вигляді неможливий. Розв'язок для конкретних чисельно заданих параметрів, звісно, можна отримати. Відносна алгебраїчна складність результатів – типове утруднення, що виникає при використанні декількох компонент у наближеному розв'язку.

Якщо знехтувати третьою гармонікою, тобто вважати $A_3 = 0$ і $A_1 = A$, то розв'язок стає простим. У цьому випадку слід розглядати лише перший з інтервалів системи, що приводить до результату

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}hA^3 = 0;$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}hA^2,$$

який співпадає з отриманими раніше в прикладах 3 і 5.

Приклад 13. Пружина з дискретно змінюваною жорсткістю

Механічний осцилятор, що складається з тіла, маса якого постійна, і пружини, жорсткість якої при зміні переміщення змінюється дискретним чином, дещо відрізняється від розглянутих раніше. Якщо жорсткість пружини зростає стрибком, коли абсолютна величина відхилення переходить за деяке критичне значення, причому величина стрибка не залежить від знаку відхилення, то її характеристика подібна зображеній на рис. 6.19.

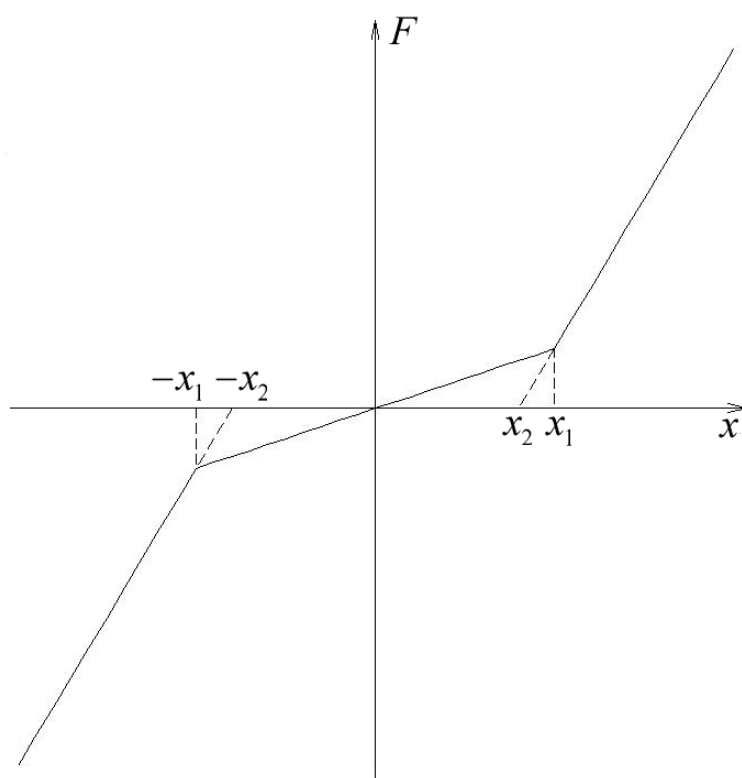


Рис. 6.19. Залежність між відновлювальною силою і відхиленням пружини в прикладі 13.

Її описом служить залежність

$$F = k_2(x + x_2) \quad \text{при} \quad x \leq -x_1;$$

$$F = k_1 x \quad \text{при} \quad -x_1 \leq x \leq x_1;$$

$$F = k_2(x - x_2) \quad \text{при} \quad x \geq x_1,$$

де F – сила, необхідна для деформації пружини; x – відхилення; при цьому $k_2 > k_1$, $x_1 > x_2$ (Щоб залежність сили від відхилення була неперервною, необхідно, щоб виконувалось відношення $k_1 x_1 = k_2 (x_1 - x_2)$). Якщо тіло постійної маси M з'єднати з такою пружиною, то його рух відповідає рівнянням

$$\ddot{x} + \omega_2^2 (x + x_2) = 0 \quad \text{при} \quad x \leq -x_1;$$

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0 \quad \text{при} \quad -x_1 \leq x \leq x_1;$$

$$\ddot{x} + \omega_2^2 (x - x_2) = 0 \quad \text{при} \quad x \geq x_1,$$

де $\omega_1^2 = k_1 / M$ і $\omega_2^2 = k_2 / M$.

Знайти наближений розв'язок, що відповідає початковим умовам $x = A$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$. Він може бути знайдений методом Рітца. Оскільки розв'язок є періодичним, його перше наближення може мати вигляд

$$x = A \cos \omega t,$$

що, звісно, відповідає початковим умовам.

Інтеграл, який необхідно обчислити в методі Рітца, слід розбити на три інтеграли, що відповідають трьом ділянкам лінійності відновлювальної сили:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega t_1} \left[(-\omega^2 A + \omega_2^2 A) \cos \omega t - \omega_2^2 x_2 \right] \cos \omega t d(\omega t) + \\ & + \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} \left[(-\omega^2 A + \omega_1^2 A) \cos \omega t \right] \cos \omega t d(\omega t) + \\ & + \int_{\omega t_2}^{\pi} \left[(-\omega^2 A + \omega_2^2 A) \cos \omega t - \omega_2^2 x_2 \right] \cos \omega t d(\omega t) = 0. \end{aligned}$$

Межі інтегрування визначаються умовами:

$$x = A \quad \text{при} \quad t = 0;$$

$$x = x_1 \quad \text{при} \quad t = t_1;$$

$$x = -x_1 \quad \text{при} \quad t = t_2;$$

$$x = -A \quad \text{при} \quad t = T / 2,$$

де T – період коливань.

Внаслідок симетрії достатньо розглядати лише половину періоду. Значення ωt_1 і ωt_2 можуть бути знайдені із співвідношень $x_1 = A \cos \omega t_1$ і $-x_1 = A \cos \omega t_2$ як $\arccos \frac{x_1}{A} = \omega t_1$ і $\arccos \frac{-x_1}{A} = \omega t_2$.

І в цьому випадку інтегрування приводить до дуже складного алгебраїчного рівняння, яке не може розв'язане в загальному вигляді. Але якщо задати числові значення параметрів рівняння, то можна отримати розв'язок для цього окремого випадку. При цьому доводиться розв'язувати кубічне рівняння для визначення невідомої частоти коливань.

Приклад 14. Вертикальне падіння з урахуванням опору повітря

В прикладі 2 досліджувався рух бомби, яка падає з порівняно невеликою швидкістю в повітряному середовищі, під дією сили земного тяжіння. Припускалося, що сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості. Якщо рух відбувається лише в вертикальному напрямі, він описується рівнянням:

$$M\dot{v} = Mg - kv^2,$$

де M – маса тіла, яке рухається; v – швидкість його вертикального падіння; g – прискорення сили тяжіння і k – коефіцієнт пропорційності між силою опору і v^2 .

Це рівняння може бути перетворено до виду

$$\dot{v} = g - hv^2, \tag{6.97}$$

де $h = k / M$.

Знайти наближений розв'язок рівняння руху, якщо спочатку тіло знаходилося в спокої, так що $v = 0$ при $t = 0$.

Не дивлячись на те, що рівняння (6.97) нелінійне, воно допускає точний розв'язок, але оскільки цей розв'язок виражається доволі складно, в деяких випадках виявляється краще отримувати наближений розв'язок, який має більш просту форму. Такий розв'язок можна знайти методом Рітца.

Швидкість падіння тіла зростає, починаючи від нульового значення, але при цьому його прискорення стає все меншим. Після тривалого часу швидкість стає постійною. Кінцева швидкість, яка досягається, коли $\dot{v} = 0$, рівна $v_f = (g / h)^{1/2} = (Mg / k)^{1/2}$. Можна припустити, що наближений розв'язок рівняння (6.97) має вигляд

$$v = v_f (1 - e^{-Ct}), \quad (6.98)$$

де C – постійна, яку потрібно визначити.

Функція часу $\varphi(t) = 1 - e^{-Ct}$ є лише прикидкою, яку ми прийняли тому, що вона дає вірне початкове і кінцеве рішення. Вибір постійної C робиться так, щоб отримати розв'язок, оптимальний у сенсі методу Рітца.

Нев'язка визначається у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon &= Cv_f e^{-Ct} - g + hv_f^2 (1 - e^{-Ct})^2 = \\ &= Cv_f e^{-Ct} - g + hv_f^2 (1 - 2e^{-Ct} + e^{-2Ct}) = \\ &= Cv_f e^{-Ct} - g + hv_f^2 - 2hv_f^2 e^{-Ct} + hv_f^2 e^{-2Ct} = \\ &= e^{-Ct} [Cv_f - 2hv_f^2] - g + hv_f^2 + hv_f^2 e^{-2Ct} = \\ &= e^{-Ct} [Cv_f + 2hv_f^2] + g - g + ge^{-2Ct} = \\ &= e^{-Ct} [Cv_f - 2g] + ge^{-2Ct}. \end{aligned}$$

Критерій Рітца виражається рівністю

$$\int_0^{\infty} \varepsilon \varphi dt = 0;$$

$$\int_0^{\infty} \left[e^{-Ct} (Cv_f - 2g) + ge^{-2Ct} \right] v_f (1 - e^{-Ct}) dt = 0;$$

$$\begin{aligned} Cv_f^2 e^{-Ct} - 2gv_f e^{-Ct} + gv_f e^{-2Ct} - Cv_f^2 e^{-2Ct} + 2gv_f e^{-2Ct} - gv_f e^{-3Ct} = \\ = e^{-Ct} (Cv_f^2 - 2gv_f) + e^{-2Ct} (3gv_f - Cv_f^2) - gv_f e^{-3Ct} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{\infty} e^{-Ct} (Cv_f - 2g) dt &= (Cv_f - 2g) \int_0^{\infty} e^{-Ct} dt = (Cv_f - 2g) \left(-\frac{1}{C} \right) e^{-Ct} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{2g - Cv_f}{C} e^{-Ct} \Big|_0^{\infty} = v_f - \frac{2g}{C}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^{\infty} e^{-2Ct} (3g - Cv_f) dt &= (3g - Cv_f) \int_0^{\infty} e^{-2Ct} dt = (3g - Cv_f) \left(-\frac{1}{2C} \right) e^{-2Ct} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{3g - Cv_f}{2C} = \frac{3}{2} \frac{g}{C} - \frac{v_f}{2}; \end{aligned}$$

$$3) \quad \int_0^{\infty} gv_f e^{-3Ct} dt = -g \int_0^{\infty} e^{-3Ct} dt = -g \left(-\frac{1}{3C} \right) e^{-3Ct} \Big|_0^{\infty} = -\frac{g}{3C};$$

$$v_f - \frac{2g}{C} + \frac{3}{2} \frac{g}{C} - \frac{v_f}{2} - \frac{1}{3} \frac{g}{C} = \frac{v_f}{2} - \frac{g}{6C} (12 - 9 + 2) = \frac{v_f}{2} - \frac{5g}{6C} = 0;$$

$$3v_f - \frac{5g}{C} = 0;$$

звідки знаходимо C

$$C = \frac{5}{3} \frac{g}{v_f} = \frac{5}{3} g \left(\frac{k}{Mg} \right)^{1/2};$$

$$C = \frac{5}{3} \left(\frac{kg}{M} \right)^{1/2}$$

і наближений розв'язок виражається формулою

$$v = v_f \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{5}{3} \left(\frac{kg}{M} \right)^{1/2} t \right] \right\}. \quad (6.99)$$

Ця формула дає правильні значення швидкості як у початковий момент, так і при $t \rightarrow \infty$. Обчислене диференціюванням цієї формули прискорення \dot{v} співпадає з істинним при $t \rightarrow \infty$, але відрізняється від нього при $t = 0$.

Оскільки функція $\varphi(t)$ виступає під інтегралом в ролі вагової функції і значення її з ростом часу зростає, слід вважати, що точність наближеного розв'язку також буде збільшуватися з ростом часу.

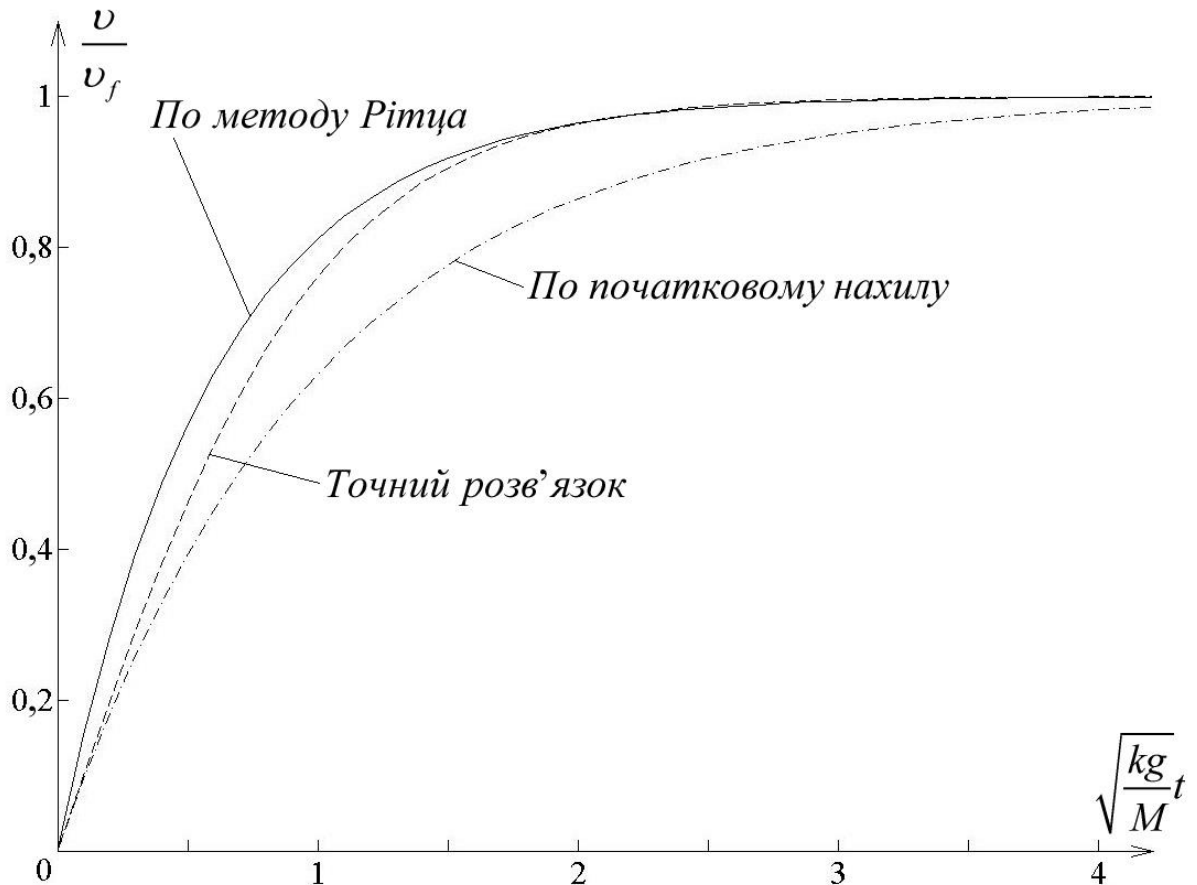


Рис. 6.20. Порівняння наближеного розв'язку прикладу 14, знайденого методом Рітца, з точним розв'язком. Наведений також графік наближеного розв'язку, отриманого іншим, менш точним методом.

Точний розв'язок рівняння (6.97) можна знайти, розділивши змінні:

$$\frac{dv}{dt} = g - hv^2 = h \left(\frac{g}{h} - v^2 \right) = h(v_f^2 - v^2);$$

$$\frac{dv}{(v_f^2 - v^2)} = h dt;$$

$$\frac{1}{2v_f} \ln \left| \frac{v_f + v}{v_f - v} \right| = ht + C;$$

$$t=0; v=0: 0 = C + \frac{1}{2v_f} \ln \left| \frac{v_f}{v_f} \right|; C=0;$$

$$\left| \frac{v_f + v}{v_f - v} \right|^{\frac{1}{2v_f}} = \exp(ht);$$

$$\left| \frac{v_f + v}{v_f - v} \right|^{\frac{1}{2}} = \exp(hv_f t);$$

$$\left(\frac{1 - v/v_f}{1 + v/v_f} \right)^{1/2} = \exp(hv_f t) = \exp \left[\frac{k}{M} \left(\frac{Mg}{k} \right)^{1/2} t \right];$$

$$\left(\frac{1 - v/v_f}{1 + v/v_f} \right)^{1/2} = \exp \left[- \left(\frac{kg}{M} \right)^{1/2} t \right]; \quad (6.100)$$

$$\frac{1 - v/v_f}{1 + v/v_f} = \exp \left[-2 \left(\frac{kg}{M} \right)^{1/2} t \right];$$

$$1 - \frac{v}{v_f} = \left(1 + \frac{v}{v_f} \right) \exp \left[-2 \left(\frac{kg}{M} \right)^{1/2} t \right];$$

$$\frac{v}{v_f} = \frac{1 - \exp \left[-2 \left(\frac{kg}{M} \right)^{1/2} t \right]}{1 + \exp \left[-2 \left(\frac{kg}{M} \right)^{1/2} t \right]}.$$

Очевидно, що не так просто прослідкувати властивості такої складної залежності. Графіки наближеного розв'язку (6.99) і точного розв'язку (6.100) представлені на рис. 6.20. Як і припускалося, з ростом часу збіг розв'язків покращується. Якщо основний інтерес полягає в дослідженні руху в області малих швидкостей, поблизу початкового моменту, більш точний розв'язок можна отримати, якщо звузити межі інтегрування. На рис. 6.20 показані також результати, які досягаються за допомогою іншого способу побудови наближеного розв'язку. Розв'язок шукався у вигляді (6.98), а постійна C визначалася так, щоб нахил графіка розв'язку в початковій точці відповідав істині. Іншими словами, постійна C вибирається рівною $(kg / M)^{1/2}$. Як видно, такий спосіб апроксимації дає порівняно низьку точність.

6.7 Принцип гармонічного балансу

В основі багатьох методів, що відрізняються лише в деталях, які часто використовуються для дослідження систем, що мають коливальні розв'язки, лежить положення, що у ряді випадків називають принципом гармонічного балансу. Цей принцип витікає з того, що хоча коливання нелінійних систем рідко описуються простими гармонічними функціями часу, вони частіше за все періодичні або близькі до періодичних коливань. Періодичні коливання можуть бути представлені у вигляді ряду Фур'є, що складається з синусних та косинусних гармонік. В багатьох випадках суттєва лише амплітуда основної гармоніки, а іноді також і амплітуди однієї або двох вищих гармонік. Згідно принципу гармонічного балансу

перше наближення розв'язків виходить при врахуванні лише складової основної частоти і це наближення будується так, щоб по основній частоті воно задовольняло початковому диференціальному рівнянню. Більш точні наближення розв'язку можуть бути отримані, якщо додатково до основної гармоніки врахувати і вищі так, щоб початкове рівняння задовольнялось по всім частотам цих врахованих компонент.

Принцип гармонічного балансу, звісно, витікає з методу Рітца у застосуванні до системи, що має періодичний розв'язок. Передбачуваний періодичний розв'язок можна представити у вигляді

$$x = C_1 \cos \omega t + C_m \cos(n\omega t + \theta_m),$$

де розглядаються лише компоненти лише двох частот: ω і $n\omega$. Після підстановки у початкове нелінійне рівняння визначається нев'язка ε , що містить як компоненти кругових частот ω і $n\omega$, так і компоненти інших частот. Зважаючи на ортогональність кругових тригонометричних функцій з інтегральних умов методу Рітца

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon(t) \cos \omega t d(\omega t) = 0 \text{ і } \int_0^{2\pi} \varepsilon(t) \cos n\omega t d(\omega t) = 0$$

витікає вимога, щоб коефіцієнти при $\cos \omega t$ і $\cos n\omega t$ у розвинені нев'язки ε у ряд Фур'є були рівними нулю.

Дію принципу гармонічного балансу можна показати і інакше, досліджуючи рівняння другого порядку, що застосовувалось при розгляді методу варіації параметрів. Воно має вигляд

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu \varphi(x, \dot{x}, t) = 0, \quad (6.101)$$

де ω_0^2 – додатна константа; функція $\varphi(x, \dot{x}, t)$ містить доданки, що викликають труднощі при розв'язанні, а μ – малий параметр.

Будемо шукати розв'язок цього рівняння у формі

$$x = A \cos(\omega_0 t + \theta) = A \cos \psi, \quad (6.102)$$

де A і θ розглядаються як функції часу.

Похідні від x виражаються як

$$\dot{x} = \dot{A} \cos \psi - (\omega_0 + \dot{\theta}) A \sin \psi;$$

$$\ddot{x} = \ddot{A} \cos \psi - \dot{A} \sin \psi (\omega_0 + \dot{\theta}) - \dot{A} \sin \psi (\omega_0 + \dot{\theta}) - A \cos \psi (\omega_0 + \dot{\theta})^2;$$

$$\ddot{x} = \left[\ddot{A} - (\omega_0 + \dot{\theta})^2 A \right] \cos \psi - 2(\omega_0 + \dot{\theta}) \dot{A} \sin \psi.$$

Так само як і у методі варіації параметрів, передбачається, що значення параметра μ достатньо мале, щоб відносна зміна амплітуди та фази за цикл коливань була малою, тобто іншими словами

$$\left| \frac{\dot{A}}{A} \right| \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right) \ll 1 \text{ і } \left| \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right| \ll 1.$$

Підставивши похідні \ddot{x} і \dot{x} в (6.101), отримаємо:

$$\begin{aligned} & \left[\ddot{A} - (\omega_0 + \dot{\theta})^2 A \right] \cos \psi - 2(\omega_0 + \dot{\theta}) \dot{A} \sin \psi + \\ & + \omega_0^2 A \cos \psi = -\mu \varphi(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi, t). \end{aligned} \quad (6.103)$$

Оскільки функція φ у правій частині цього рівняння перемножується на μ , з доданків з похідною \dot{x} , що входять під знак функції φ , має значення лише найбільший, і тому залишається лише доданок $-\omega_0 A \sin \psi$.

У лівій частині рівняння (6.103) фігурують доданки, що містять синус і косинус основної частоти. Коефіцієнти при цих членах можуть змінюватися, однак ця зміна повинна бути настільки повільною, щоб значення доданків залишилося доволі близьким до синусної і косинусної залежностей. Взагалі кажучи, функція φ , що стоїть у правій частині, буде також містити подібні доданки з синусом і косинусом основної частоти. Для простоти можна розбити функцію φ на частини наступним чином:

$$\varphi = \Phi_c \cos \psi + \Phi_s \sin \psi + \Phi_r, \quad (6.104)$$

де Φ_c – коефіцієнт при всіх членах, що містять $\cos \psi$; Φ_s – коефіцієнт при всіх членах, що містять $\sin \psi$; Φ_r – функція, що складається з усіх інших доданків.

Згідно принципу гармонічного балансу доданки лівої частини рівняння, що містять $\cos \psi$, повинні дорівнювати доданкам з $\cos \psi$ у правій частині рівняння. Рівність повинна виконуватись і для доданків, що містять $\sin \psi$. Записавши ці рівності, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A} - (\omega_0 + \dot{\theta})^2 A + \omega_0^2 A &= -\mu \Phi_c \\ -2(\omega_0 + \dot{\theta}) \dot{A} &= -\mu \Phi_s \end{aligned} \right\} \quad (6.105)$$

Припущення про малість \dot{A} та $\dot{\theta}$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} |\ddot{A}| &\ll |\dot{A}| \frac{\omega_0}{2\pi} \ll |A| \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \right)^2; \\ |\dot{\theta}| &\ll \omega_0. \end{aligned}$$

Розв'язавши системи рівнянь (6.105) з урахуванням цих умов, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\mu \Phi_c}{2\omega_0 A} \\ \dot{A} &= \frac{\mu \Phi_s}{2\omega_0} \end{aligned} \right\} \quad (6.106)$$

Коефіцієнти Φ_c та Φ_s , що відповідають функції ψ , визначаються як коефіцієнти Фур'є. Помноживши обидві частини (6.104) на $\cos \psi$ та проінтегрувавши його по ψ за повний період, отримаємо:

$$\int_0^{2\pi} \varphi \cos \psi d\psi = \int_0^{2\pi} \Phi_c \cos^2 \psi d\psi + \int_0^{2\pi} \Phi_s \sin \psi \cos \psi d\psi + \int_0^{2\pi} \Phi_r \cos \psi d\psi.$$

Лише перший інтеграл, що стоїть у правій частині цього виразу, має відмінне від нуля значення, яке дорівнює $\pi\Phi_c$. Таким чином, шуканий коефіцієнт

$$\Phi_c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \cos \psi d\psi.$$

Аналогічно Φ_s визначається як

$$\Phi_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \sin \psi d\psi.$$

Насправді, звичайно, оскільки \dot{A} та $\dot{\theta}$ не рівні нулю, ці інтеграли не зовсім точні. Однак, якщо припущення про малість \dot{A} та $\dot{\theta}$ виконується, похибка також мала. Використовуючи знайдене значення коефіцієнтів у рівняннях (6.106), отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\mu}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \varphi(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi, t) \sin \psi d\psi \\ \dot{\theta} &= \frac{\mu}{2\pi\omega_0 A} \int_0^{2\pi} \varphi(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi, t) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (6.107)$$

Ці вирази співпадають з виразами (6.42), що були визначені за допомогою методу варіації параметрів.

Таким чином, можна зробити висновок, що обидва методи, по своїй суті різні: метод варіації параметрів і метод, заснований на принципі гармонічного балансу, принаймні при дослідженні рівняння (6.101) приводять в першому наближенні до одного і того ж результату.

Іноді принцип гармонічного балансу застосовують, щоб замінити початкове нелінійне рівняння (6.101) лінійним рівнянням, розв'язок якого співпадає з першим наближенням розв'язку нелінійного рівняння. Цей спосіб називається методом еквівалентної лінеаризації. За цю лінеаризацію

доводиться платити тим, що коефіцієнти отриманого лінійного рівняння виявляються змінними, що залежать від амплітуди або від часу.

Передбачуваний вигляд еквівалентного лінійного рівняння

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (6.108)$$

Коефіцієнти γ та ω^2 повинні бути визначені так, щоб його розв'язок співпадав з першим наближенням розв'язку (6.101), який має вигляд (6.102). Підставивши цей вираз та його похідні у рівняння (6.108), отримаємо:

$$\begin{aligned} \left[\ddot{A} - (\omega_0 + \dot{\theta})^2 A \right] \cos \psi - 2(\omega_0 + \dot{\theta}) \dot{A} \sin \psi + 2\gamma \dot{A} \cos \psi - \\ - 2\gamma (\omega_0 + \dot{\theta}) \dot{A} \sin \psi + \omega^2 A \cos \psi = 0. \end{aligned}$$

Знову прирівнюємо нулю сумарні коефіцієнти при косинусі та синусі:

$$\begin{aligned} \ddot{A} - (\omega_0 + \dot{\theta})^2 A + 2\gamma \dot{A} + \omega^2 A = 0; \\ -2(\omega_0 + \dot{\theta}) \dot{A} - 2\gamma (\omega_0 + \dot{\theta}) \dot{A} = 0. \end{aligned}$$

Друге з цих рівнянь визначає γ як

$$\gamma = -\frac{\dot{A}}{A}.$$

З припущення

$$|\dot{A}| \ll |A| \frac{\omega_0}{2\pi}$$

в цьому випадку впливає вимога

$$|\gamma| \ll \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Ця умова спільно з першим з попередніх рівнянь визначає

$$\omega^2 = (\omega_0 + \dot{\theta})^2.$$

Таким чином, рівняння (6.108) можна переписати у вигляді рівняння

$$\ddot{x} - \frac{2\dot{A}}{A}\dot{x} + (\omega_0 + \dot{\theta})^2 x = 0, \quad (6.109)$$

коефіцієнти якого змінні та повинні бути визначені за допомогою (6.107).

Оскільки рівняння (6.109) лінійне, змінні коефіцієнти не завжди є завадою тому, щоб отримати достатньо простий розв'язок.

Приклад 15. Нелінійний демпфований осцилятор

Нелінійний демпфований осцилятор описується рівнянням

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + hx^3 = 0. \quad (6.110)$$

Воно є комбінацією рівнянь (6.46) і (6.52). Замінити це рівняння еквівалентним лінійним рівнянням.

Еквівалентне лінійне рівняння має вигляд (6.109), а його розв'язок відповідає (6.102). Визначимо \dot{A} і $\dot{\theta}$ за допомогою (6.107).

$$\dot{A} = \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} (hA^3 \cos^3 \psi - 2\alpha\omega_0 A \sin \psi) \sin \psi d\psi = -\alpha A;$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2\pi\omega_0 A} \int_0^{2\pi} (hA^3 \cos^3 \psi - 2\alpha\omega_0 A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{3hA^2}{8\omega_0}.$$

Таким чином, еквівалентна лінійна форма для рівняння (6.110)

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \left(\omega_0 + \frac{3hA^2}{8\omega_0} \right)^2 x = 0. \quad (6.111)$$

Очевидно, що це рівняння відповідає коливанням, амплітуда і частота яких змінюються з плином часу. Амплітуда A зменшується з ростом часу і гранично прямує до нуля. Частота коливань також зменшується і прямує до границі, рівній ω_0 .

Приклад 16. Рівняння Ван дер Поля

Рівняння Ван дер Поля має вигляд

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (6.112)$$

Замінити це рівняння еквівалентним лінійним. Значення \dot{A} і $\dot{\theta}$ відповідно до (6.107) визначається як

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - A^2 \cos^2 \psi)(-A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\ &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-A \sin \psi + A^3 \cos^2 \psi \sin \psi] \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{\varepsilon A}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi - A^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi \sin^2 \psi d\psi \right) = \\ &= \frac{\varepsilon A}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\psi) d\psi - \frac{\varepsilon A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi (1 - \cos^2 \psi) d\psi \right) = \\ &= \frac{\varepsilon A}{2\pi} \left(\pi - A^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi - \int_0^{2\pi} \cos^4 \psi d\psi \right] \right) = \\ &= \frac{\varepsilon A}{2\pi} \left\{ \pi - A^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\psi) d\psi - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\psi}{2} \right)^2 d\psi \right] \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon A}{2\pi} \left\{ \pi - A^2 \left[\frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} d\psi + \int_0^{2\pi} \cos 2\psi d\psi \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} \left(\int_0^{2\pi} d\psi + 2 \int_0^{2\pi} \cos 2\psi d\psi + \int_0^{2\pi} \cos^2 2\psi d\psi \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon A}{2\pi} \left\{ \pi - A^2 \left[\pi - \frac{1}{4} \left(2\pi + 0 + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 4\psi}{2} d\psi \right) \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon A}{2\pi} \left\{ \pi - A^2 \left[\pi - \frac{1}{4} \left(2\pi + \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 4\psi d4\psi \right) \right) \right] \right\} = \\
&= \frac{\varepsilon A}{2\pi} \left\{ \pi - A^2 \left[\pi - \frac{1}{4} (2\pi + \pi) \right] \right\} = \frac{\varepsilon A}{2\pi} \left\{ \pi - A^2 \left[\pi - \frac{3\pi}{4} \right] \right\} = \\
&= \frac{\varepsilon A}{2\pi} \left\{ \pi - \frac{A^2 \pi}{4} \right\} = \frac{\varepsilon A}{2} \left\{ 1 - \frac{A^2}{4} \right\};
\end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{2\pi A} \int_0^{2\pi} (1 - A^2 \cos^2 \psi) (-A \sin \psi) \cos \psi d\psi = 0.$$

Внаслідок цього еквівалентне лінійне рівняння має вигляд

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} - \frac{2\dot{A}}{A} \dot{x} + (\omega_0 + \dot{\theta})^2 x = 0; \\
&\ddot{x} - 2 \frac{\varepsilon A}{2A} \left(1 - \frac{A^2}{4} \right) \dot{x} + (1 + 0)^2 x = 0; \\
&\ddot{x} - \varepsilon \left(1 - \frac{A^2}{4} \right) \dot{x} + x = 0.
\end{aligned} \tag{6.113}$$

Очевидно, що стійкі незатухаючі коливання можуть мати місце при $A = \pm 2$, що збігається з амплітудою граничного циклу.

7 ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

7.1 Вступ

Більшість аналітичних методів дослідження нелінійних систем може застосовуватися як до автономних систем, так і до систем, що знаходяться під дією зовнішнього збурення, усі розглянуті раніше приклади мали відношення до вільних від дії зовнішніх збурень автономних систем. Розглянемо нелінійні системи під дією зовнішніх періодичних збурень. Зазвичай для дослідження вимушених коливань доцільно застосовувати метод збурень або який-небудь із методів, які засновані на принципі гармонійного балансу. При застосуванні цих методів вимагається математичний опис системи за допомогою відповідних рівнянь, розв'язки яких визначаються у вигляді аналітичних виразів. Дослідження обмежується усталеними режимами. Перехідні режими в нелінійній системі, що піддається періодичному зовнішньому збуренню, можуть виявитися істотно цікавими, проте зазвичай визначення цих режимів вельми складне.

В протилежність попередньому розгляду, в якому головним чином викладався математичний апарат для дослідження нелінійних систем, даний розгляд присвячений в основному застосуванню вже розглянутого математичного апарата до конкретних типів задач, розв'язання яких представляє суттєвий інтерес. В таких системах має місце ряд цікавих явищ, характерних для нелінійних систем і неможливих в системах лінійних. У число цих явищ входять такі, як стрибкоподібна зміна амплітуди коливань, збудження вищих гармонік, кратних частоті збурення, збудження субгармонік і захоплення частоти генератора. Явища цього роду виникають в порівняно складних системах, детальне дослідження

яких практично неможливе. Будемо розглядати лише прості системи. Дослідження цих систем створює основу для ознайомлення з роботою куди більш складних фізичних систем.

При дослідженні вимушених коливань нелінійних систем характерно, що розв'язок навіть порівняно простих диференціальних рівнянь приводить до дуже складних алгебраїчних рівнянь. З цих алгебраїчних рівнянь дуже нелегко отримати доступні огляду результати. Найчастіше буває необхідно вдаватися до графічних або чисельних методів для того, щоб отримати хоч якісь відомості. Надалі навмисно наводяться відносно прості приклади, але і в них виникають істотні обчислювальні труднощі.

7.1 Принцип гармонічного балансу для коливальних систем

Застосування методів, заснованих на принципі гармонійного балансу, до вимушених коливань нелінійних систем аналогічно застосуванню цих методів до вільних коливань нелінійних систем, розглянутому раніше. По суті розглядається лише основна складова несинусоїдної періодичної змінної і її параметри визначаються так, щоб ця основна складова якнайкраще відповідала розв'язку нелінійного рівняння.

Розглянемо рівняння вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu \varphi(\dot{x}, x) = G(t), \quad (7.1)$$

де ω_0^2 – додатна постійна; $\varphi(\dot{x}, x)$ – яка-небудь нелінійна функція, а $G(t)$ являє собою збурюючу силу. Зазвичай вважають, що $G(t)$ змінюється згідно простому гармонійному закону $G(t) = G \cos \omega t$, де кругова частота

ω_1 , взагалі кажучи, відрізняється від ω_0 . Якщо рівняння (7.1) описує рух механічної системи, для якої x виражає переміщення, $G(t)$ має розмірність прискорення. Малий параметр μ пов'язаний з нелінійною функцією.

В будь-якій реальній системі існують втрати енергії, хоча лінійний дисипативний доданок, що міститься в \dot{x} , і не виписаний окремо в рівнянні (7.1). Тому можна припустити, що розв'язок цього рівняння, взагалі кажучи, буде містити щось аналогічне перехідній складовій, яка врешті-решт згасає, і сталу складову, яка залишається. Розв'язок нелінійного рівняння, звичайно, не може бути з такою легкістю розбитий на дві частини, бо принцип суперпозиції незастосовний до нелінійних рівнянь. Усталена вимушена частина розв'язку є першочерговим предметом всіх досліджень цього розгляду.

Для того щоб знайти усталене рішення рівняння (7.1), зазвичай припускають, що воно має вигляд

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad (7.2)$$

де A_1 і θ_1 – постійні, що підлягають визначенню. Ці постійні знаходять, підставляючи передбачуваний розв'язок в рівняння і вибираючи значення постійних так, щоб рівняння задовольнялося з точністю до доданків основної частоти ω_1 . Звісно, існують і члени частоти, не рівної ω_1 , але в першому наближенні ними нехтують. Частота передбачуваного розв'язку дорівнює частоті зовнішнього збурення. У деяких випадках істотні розв'язки іншої частоти і можливість їх існування має бути досліджена. Найчастіше зручніше відносити можливий фазовий зсув між $G(t)$ і $x(t)$ до $G(t)$, записуючи цю функцію у вигляді

$$G(t) = G(t) \cos(\omega_1 t + \theta_0) = G_c \cos \omega_1 t + G_s \sin \omega_1 t, \quad (7.3)$$

що дає можливість прийняти для x більш простий вираз: $x = A_1 \cos \omega_1 t$. Цей прийом спрощує викладки при диференціюванні і підстановці у вихідне диференціальне рівняння.

Як і у всіх нелінійних задачах, важливо мати деякі попередні відомості про вигляд шуканого розв'язку. Навіть таке просте на перший погляд рівняння, як (6-1), володіє рядом різних за виглядом розв'язків і жоден з методів аналізу не дозволяє знайти всі розв'язки одразу. Необхідно в певній мірі підганяти деталі так, щоб розв'язок по вигляду відповідав очікуваному.

Приклад 17. Рівняння Дуффінга. Ферорезонанс. Стрибки. Гармоніки

а) *Попередній розгляд системи.* Механічна система, що складається з інерційної маси, що утримується за допомогою нелінійної пружини, вже розглядалась нами вище і були присвячені дослідженню вільних коливань. Розглянемо рух цієї системи під дією сили, зміна якій описується простою гармонійною функцією часу. Цьому випадку відповідає рівняння руху

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + hx^3 = G(t) \cos \omega_1 t, \quad (7.4)$$

де $G(t) \cos \omega_1 t$ – збурююча сила. Коефіцієнт G дорівнює відношенню амплітуди вимушених коливань до маси рухомої системи. Коефіцієнти ω_0^2 і h залежать від параметрів системи, причому h додатний для жорсткої і від'ємний для м'якої пружини.

Рівняння (7.4) – класичне рівняння теорії нелінійних систем і відоме як рівняння Дуффінга. Крім того, що воно описує рух механічної системи, що складається з маси та нелінійної пружини, воно також служить описом послідовного електричного кола, що містить ємність і індуктивність, за умови, що один з цих елементів нелінійний. Ланцюг підключений до

джерела синусоїдальної напруги. Оскільки в електричних системах часто мають місце явища, пов'язані з насиченням залізного осердя, зупинимося на дослідженні ланцюгів цього виду.

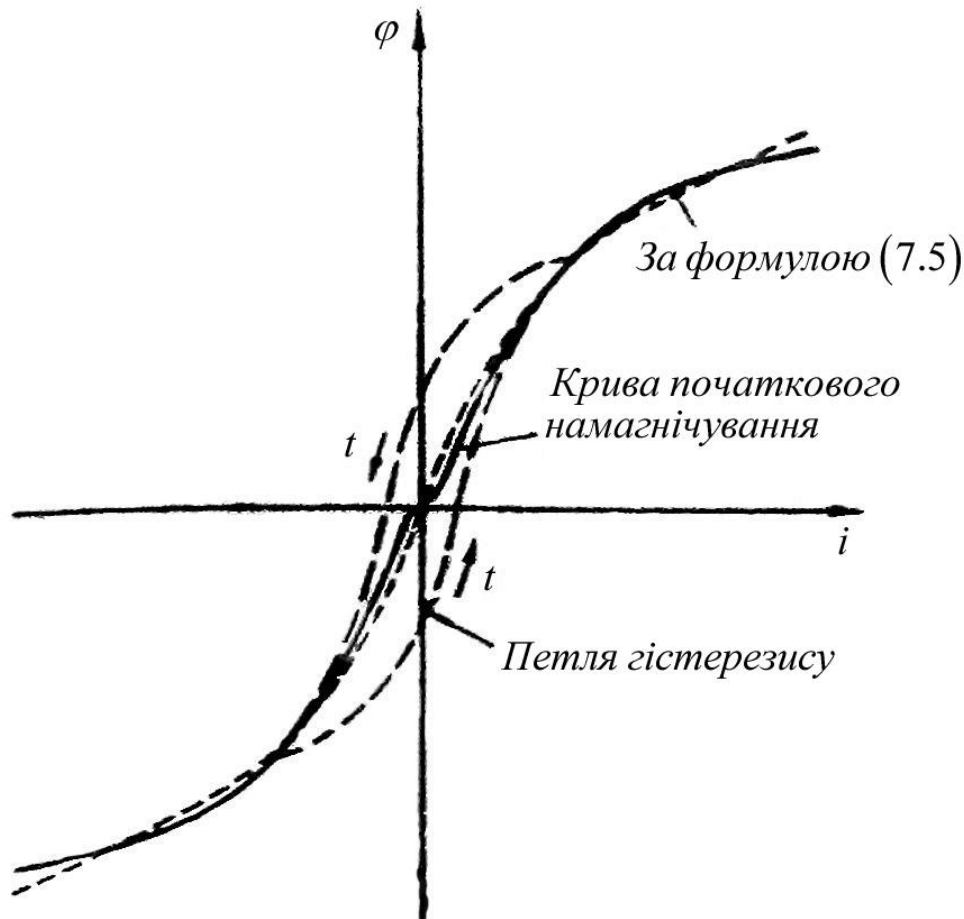


Рис. 7.1. Крива намагнічування і петля гістерезису для сталевого осердя до прикладу 17. Показана апроксимація кривої намагнічування. Стрілками вказано напрямок росту часу.

Характеристика намагнічування залізного осердя, по обмотці якого протікає намагнічуючий струм, представлена на рис. 7.1. Ця характеристика пов'язує значення магнітного потоку φ в осерді зі значенням струму i в котушці. Якщо струм змінюється синусоїдально, то характеристика стає неоднозначною, що виражається представленою на графіку петлею гістерезису. Зростання часу відповідає напрямку,

зазначеному стрілками. При зміні амплітуди струму кінці петлі гістерезису переміщуються по кривій початкового намагнічування. Для цієї кривої характерно зменшення крутизни, пов'язане з так званим насиченням осердя при великих струмах. Зазвичай існує ділянка перегину кривої поблизу початку координат. Характеристика намагнічування, представлена на рис. 7.1, типова для багатьох марок сталі, використовуваної в електричних машинах і трансформаторах. Вона, звичайно, відрізняється від характеристики сплавів, спеціально розроблених для магнітних підсилювачів.

Крива намагнічування, зображена на рис. 7.1, наближено описується виразом

$$i = \frac{N\varphi}{L_0} + a\varphi^3, \quad (7.5)$$

де N – число витків обмотки, по якій протікає струм i , а L_0 і a — додатні постійні. Постійна L_0 відповідає індуктивності, яка мала б місце за відсутності насичення при $a=0$. Рівняння, що містить лише один нелінійний доданок, як (7.5), не може достатньо точно відповідати кривій намагнічування з усіма її перегинами. У кращому випадку можна домогтися наближеної відповідності, показаної на рисунку пунктиром. Тому очевидно, що (7.5) надто просте для того, щоб дати опис явищ, пов'язаних з магнітним насиченням залізного осердя. Це рівняння не може одночасно врахувати насичення і з достатньою точністю апроксимувати криву намагнічування поблизу початку координат. Далі, воно виражає однозначну залежність і повністю виключає з розгляду гістерезис. Можна показати, що гістерезис відображає втрати енергії в осерді, і оскільки він не розглядається, явища розсіювання енергії не враховуються рівнянням. Але, хоча (7.5) враховує лише деякі властивості, характеристики дроселя із

залізним осердям, воно дозволяє передбачити ті явища, які спостерігаються в електричних колах, що містять подібний дросель.

Якщо дросель використовується в схемі, представленій на рис. 7.2, електричний ланцюг описується рівнянням

$$\frac{q}{C} + e_L = E \sin \omega_1 t,$$

де q – миттєве значення заряду в конденсаторі; C – ємність; e_L — миттєве значення падіння напруги на дроселі та $E \sin(\omega_1 t)$ – живляча напруга.

Швидкість зміни заряду дорівнює струму i в колі, який пов'язаний з миттєвим значенням магнітного потоку залежністю (7.5), так що

$$\dot{q} = i = \frac{N\varphi}{L_0} + a\varphi^3.$$

Далі, миттєве значення падіння напруги на дроселі пропорційне швидкості зміни магнітного потоку, тобто $e_L = Nd\varphi / dt$. Диференціюючи рівняння електричного кола по часу і враховуючи ці співвідношення, отримаємо:

$$\frac{\dot{q}}{C} + \dot{e}_L = E\omega_1 \cos \omega_1 t;$$

$$\dot{q} = i = \frac{N\varphi}{L_0} + a\varphi^3;$$

$$\frac{N\varphi}{L_0 C} + \frac{q}{C} \varphi^3 + N \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = E\omega_1 \cos(\omega_1 t);$$

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi + h\psi^3 = E\omega_1 \cos(\omega_1 t), \quad (7.6)$$

де $\psi = N\varphi$; $\omega_0^2 = 1 / L_0 C$ і $h = a / N^3 C$.

Рівняння (6-6) має той же вигляд, що і рівняння Дуффінга (7.4).

Аналогічне насичення спостерігається в конденсаторах, що містять діелектрики певного типу. Заряд таких конденсаторів відбувається з

насиченням у міру зростання прикладеної напруги, причому значення заряду і напруги пов'язані залежністю, аналогічною (7.5). Коло, що містить такий нелінійний конденсатор і лінійну індуктивність, також описується рівнянням Дуффінга.

б) *Стрибокоподібні зміни амплітуди зі зміною частоти.* Одним з явищ, які спостерігаються в системах, описуваних рівнянням Дуффінга, є стрибокоподібна зміна амплітуди, можлива навіть у випадку, коли частота або амплітуда вимушених коливань змінюється плавно і безперервно. У той же час збуджуються вищі гармоніки, кратні частоті вимушених коливань.

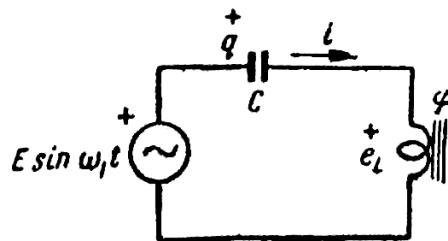


Рис. 7.2. Коло, яке містить дросель зі сталлю, до прикладу 17.

Розв'язок (7.4) можна шукати у вигляді виразу (7.2), тобто $x = A \cos \omega_1 t$. В (7.4) не фігурує доданок, який містить \dot{x} і виражає втрати енергії, і тому припускається, що x по фазі або збігається з збуджуючою силою, або протилежний їй. Внаслідок цього кут зсуву фази не вводиться в розв'язок. Після диференціювання передбачуваного розв'язку і підстановки у вихідне отримаємо:

$$\dot{x} = -\omega_1 A \sin \omega_1 t ;$$

$$\ddot{x} = -\omega_1^2 A \cos \omega_1 t ;$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + h x^3 = G \cos \omega_1 t ;$$

$$-\omega_1^2 A \cos \omega_1 t + \omega_0^2 A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + h A^3 \cos^3(\omega_1 t + \theta_1) = G \cos \omega_1 t ;$$

$$\cos \omega_1 t (-\omega_1^2 A + \omega_0^2 A) + hA^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega_1 t + \frac{1}{4} \cos 3\omega_1 t \right) = G \cos \omega_1 t ;$$

$$\cos \omega_1 t \left(-\omega_1^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3}{4} hA^3 \right) + \frac{hA^3}{4} \cos 3\omega_1 t = G \cos \omega_1 t .$$

(Тут ми скористалися відомим виразом $\cos^3 x = 3/4 \cos x + 1/4 \cos 3x$)
 Вимагатимемо, щоб рівняння задовольнялося з точністю до доданків основної частоти, для чого зберемо всі члени, що містять $\cos \omega_1 t$. (Єдиний доданок, що містить $\cos 3\omega_1 t$, на даному етапі виключається з розгляду.)
 При цьому одержимо рівняння

$$-\omega_1^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3hA^3}{4} = G. \quad (7.7)$$

Це кубічне рівняння для визначення невідомої амплітуди A . Очевидно, що воно визначає щонайменше одне дійсне значення A , а може визначити три її дійсних значення. Таким чином, розв'язок може виявитися неоднозначним, що спричиняє можливість стрибків амплітуди.

Найпростіше досліджувати рівняння (7.7) за допомогою графічної побудови, для чого рівняння поділяють на дві частини:

$$y_1 = A(\omega_1^2 - \omega_0^2) + G;$$

$$y_2 = \frac{3}{4} hA^3$$

і визначають значення A з умови $y_1 = y_2$. Можна побудувати графіки y_1 і y_2 в залежності від A ; точки їх перетину будуть відповідати рівності $y_1 = y_2$. Цю побудову наведено на рис. 7.3. Для графіків y_1 прийнято одне конкретне значення G , тоді як значення ω_1 є параметром сімейства. На рисунку побудовано декілька конкретних графіків у вигляді прямих ліній з різним нахилом. Там же представлені два графіки y_2 : графік, який

відповідає лінійній системі ($h=0$), і графік, який відповідає механічній системі з жорсткою пружиною чи електричному колу з насичуваним стальним осердям ($h>0$).

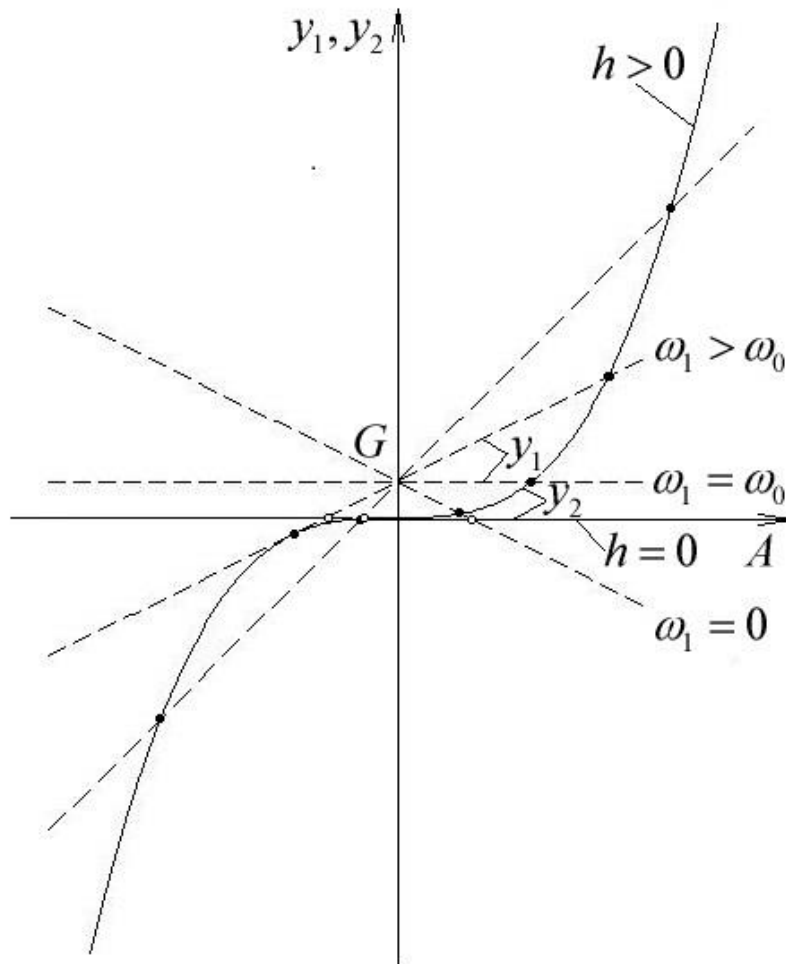


Рис. 7.3. Графічний розв'язок кубічного рівняння для того, щоб визначити амплітуду A в прикладі 17.

Точки перетину графіків y_1 і y_2 визначають можливі значення A , по яким побудовані графіки рис. 7.4. Кожен з цих графіків ділиться на дві гілки відповідно з додатним і від'ємним значеннями A . Різниця в знаку відображає лише зміну фази і показує, що розв'язок по фазі або збігається зі збурюючою силою, або протилежний їй. З рис. 7.4 випливає, що для

лінійного випадку ($h=0$) A є однозначною функцією ω_1 , тоді як при $h>0$ одному значенню ω_1 можуть відповідати три значення A . Ці три значення відповідають трьом дійсним кореням рівняння (7.7). Одне дійсне значення A отримується, коли два інших корені комплексно-спряжені.

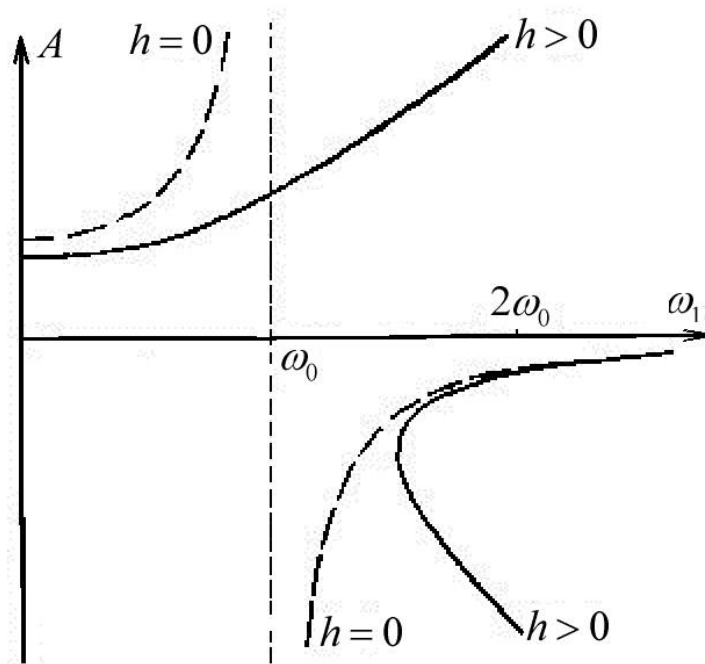


Рис. 7.4. Залежність амплітуди A від частоти зовнішнього впливу, амплітуда якого постійна, для лінійного і нелінійного контурів.

Трактування графіків рис. 7.4 спрощується, якщо враховувати лише абсолютне значення A , як це зроблено на рис. 7.5. Впадає в око, що графік для $h=0$ є не що інше, як всім відома резонансна крива лінійної консервативної системи. Резонанс настає при $\omega_1 = \omega_0$ і, якщо дисипація енергії відсутня, то в момент резонансу амплітуда стає нескінченно великою. По обидві сторони від резонансної частоти амплітуда зменшується.

Графік, що відповідає нелінійній системі з $h>0$, на рис. 7.5 також можна розглядати в якості резонансної кривої. При цьому вертикальна в

лінійному випадку вісь кривої вигинається праворуч. Якісна картина така. Для системи з жорсткою пружиною ($h > 0$) ефективна жорсткість збільшується зі збільшенням відхилення. Коли частота збурення зростає, починаючи зі значень, менших, ніж ω_0 , з наближенням до резонансу амплітуда збільшується. Збільшення амплітуди приводить до росту еквівалентної жорсткості, що збільшує значення резонансної частоти. У випадку нелінійної консервативної системи (рис. 7.5) цей процес може продовжуватися нескінченно і приводить до деформації вісі резонансної кривої.

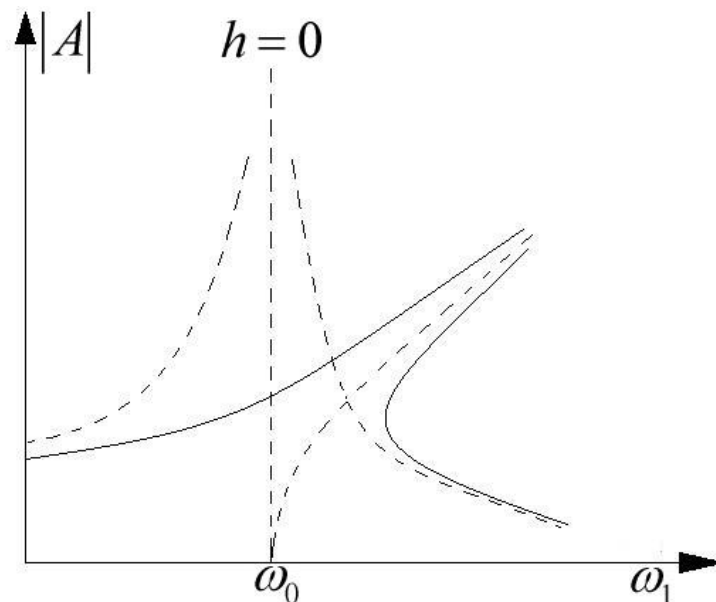


Рис. 7.5. Резонансні криві до прикладу 17 при постійній амплітуді зовнішнього впливу для лінійного і нелінійного контуру.

Графіки на рис. 7.3, 7.4 і 7.5 накреслені для одного конкретного значення амплітуди збурення G . Подібні ж графіки можна отримати для інших значень G , що дає сімейство кривих, зображене на рис. 7.6. Усі криві сімейства розташовані поблизу кривої, яка задається рівнянням (7.7) при $G = 0$, яке має вигляд

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}hA^2. \quad (7.8)$$

Воно співпадає з виразом (6.34), знайденим в прикладі 3 для вільних коливань цієї системи.

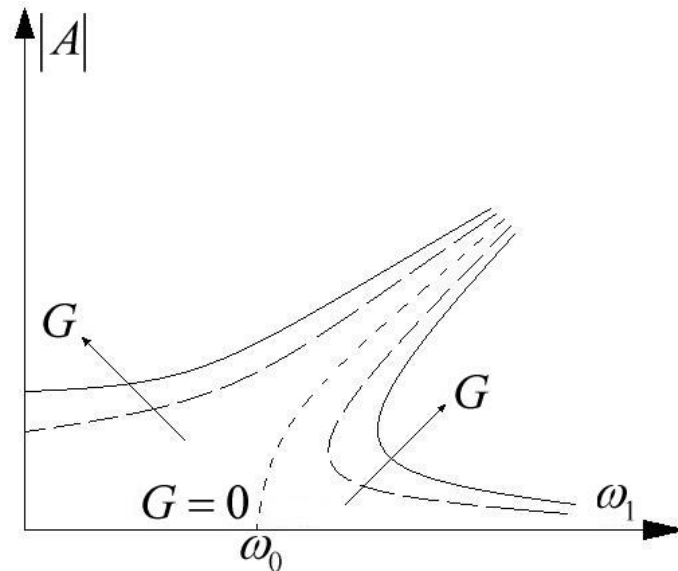


Рис. 7.6. Сімейство резонансних кривих нелінійного контуру з прикладу 17, які ілюструють вплив зміни амплітуди зовнішнього впливу

Будь-яка фізична система є дисипативною. Для того, щоб відповідати реальним умовам, вихідне рівняння повинно містити доданок, який виражає втрати енергії. Однак внесення доданка, що містить \dot{x} , помітно ускладнює дослідження. Далі, в електричному колі, схема якого наведена на рис. 7.2, втрати мають місце не тільки за рахунок омичного опору котушки, але і за рахунок вихрових струмів і гістерезису в осерді. Точний опис цих явищ достатньо складний. Тому спочатку проведемо лише якісне дослідження дисипативної системи.

Вплив дисипації на лінійний резонансний контур є загальновідомим. Якщо втрати енергії порівняно малі, вони проявляються лише поблизу резонансної частоти. При резонансі дисипація усуває нескінченний ріст амплітуди розв'язку і створює закруглену вершину кривої в точці

резонансу. Збільшення втрат енергії приводить до зниження максимуму резонансної кривої. Можна припускати, що мале розсіяння енергії і в нелінійній системі приведе до тих же якісних результатів. Тому графік (рис. 7.5), що відповідає консервативній системі, для системи з невеликою дисипацією перетворюється в графік, представлений на рис. 7.7. У деформованій резонансній кривій з'являється закруглена вершина, розташування якої залежить від відносного значення втрат енергії.

Рис. 7.7 дозволяє пояснити можливу появу стрибкоподібних змін амплітуди. Якщо задати значення G і попередньо обрати значення ω_1 , менше, ніж ω_0 , то амплітуда розв'язку визначається точкою, розташованою на лівій ділянці кривої. Зі збільшенням ω_1 значення $|A|$ зростає в міру руху по резонансній кривій. В момент проходження вершини при подальшому збільшенні частоти амплітуда $|A|$ повинна стрибкоподібно зменшитися до меншого значення так, як це показано пунктиром. Подальше збільшення частоти приводить до повільного зменшення $|A|$ в міру просування по нижній гілці кривої. Зі зменшенням ω_1 $|A|$ повільно зростає відповідно точкам нижньої гілки. Так продовжується до тих пір, поки не досягається точка, в якій нахил нижньої гілки стає нескінченним. Подальше зменшення частоти приводить до того, що амплітуда $|A|$ повинна змінитися стрибком до більшого значення, яке визначається верхньою гілкою, так як це показано другою пунктирною лінією, після чого зміна абсолютного значення амплітуди знову відповідає верхній гілці кривої. Отже, існує інтервал частот, розташований між пунктирними прямими, при яких може існувати будь-яке з двох різних значень $|A|$. Яке саме з цих значень має місце, залежить від попередньої історії системи.

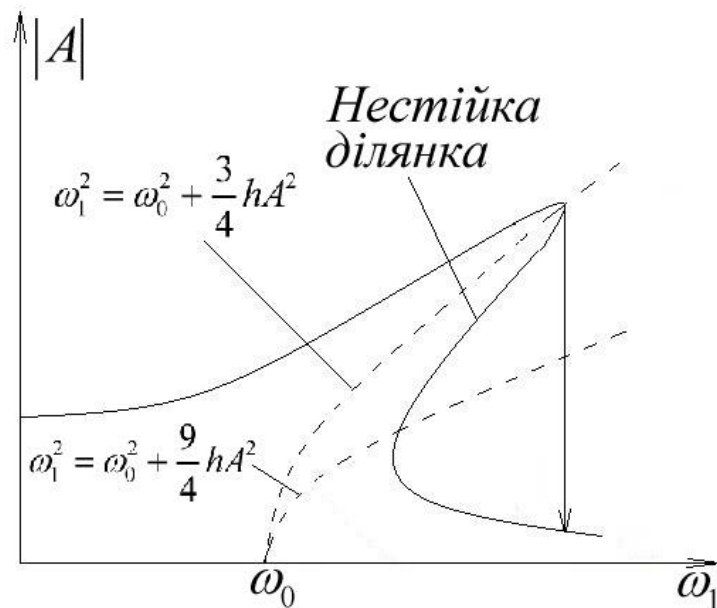


Рис. 7.7. Нелінійна резонансна крива до прикладу 17, побудована для постійної амплітуди зовнішнього впливу з урахуванням невеликих втрат енергії в контурі. Ілюструється умови стрибкоподібних змін амплітуди

Насправді між двома пунктирними прямими графік визначає три можливих значення $|A|$, з яких нами розглянуті тільки два. Третє значення, що відповідає середній, виділеній потовщеною лінією, гілці графіка, нестійке і не може бути отримане в умовах експерименту. Дослідження дійсних причин цієї нестійкості доведеться відкласти, проте до якісних міркувань можна прийти, розглядаючи рис. 7.6. Як видно, в області, де припускається нестійкість, збільшення діючої сили G приводить до зменшення амплітуди $|A|$. Стійку систему характеризує прямо протилежний закон зміни: ріст амплітуди збурення викликає зростання її відхилень. Це дає можливість вважати, що передбачувана нестійкість дійсно буде мати місце.

Стрибкоподібне зменшення $|A|$, як показано на рис. 7.7, відбувається поблизу вершини похилої резонансної кривої, розташування якої залежить

від відносного значення розсіювання енергії в системі. Все, що ми можемо сказати на основі попередніх дослідження про розташування цієї точки, зводиться до того, що, якщо розсіювання невелике, вона буде знаходитися поблизу вісі резонансної кривої, що визначається виразом (7.8). Зі збільшенням розсіювання резонансний пік знижується. При великих значеннях розсіювання резонансна крива стає однозначною і явище стрибка стає неможливим.

Стрибкоподібне збільшення $|A|$, як показано на рис. 7.7, визначається тим, що нахил резонансної кривої в цій точці нескінченний. З огляду на те, що вона лежить далеко від вершини, на ділянці, де розсіювання (якщо воно достатньо мале) майже не проявляється, її розташування можна приблизно визначити, продиференціювавши вираз (7.7). Умову

$$\frac{dA}{d\omega_1} = \infty$$

можна замінити умовою

$$\frac{d\omega_1^2}{dA} = 0,$$

звідки отримаємо

$$\frac{d\omega_1^2}{dA} = \frac{G}{A^2} + \frac{3}{2}hA = 0.$$

Знайдене таким чином значення

$$G = -\frac{3}{2}hA^3$$

після підстановки в (7.7) дає:

$$-\omega_1^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3}{4}hA^3 = G;$$

$$-\omega_1^2 + \omega_0^2 + \frac{3}{4}hA^2 = \frac{G}{A};$$

$$\frac{d\omega_1^2}{dA} = \frac{3}{2}hA + \frac{G}{A^2} = 0;$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}hA^2 + \frac{3}{2}hA^2 = \omega_0^2 + \frac{9}{4}hA^2. \quad (7.9)$$

Геометричне місце точок стрибкоподібного збільшення амплітуди при зміні частоти збурення ω_1 для малих значень розсіяння побудоване згідно наближеним відношенням (7.8) і (7.9) на рис. 7.7. Стрибкоподібне зменшення амплітуди, яке відбувається при більших частотах, при демонстрації виявляється більш ефектним.

Слід зауважити, що попереднє, а також і наступне дослідження рівняння Дуффінга приводяться для випадку додатного параметра h . Це відповідає явищам, які спостерігаються в більшості фізичних систем. Якщо змінити знак h , що також іноді зустрічається на практиці, явища, які спостерігаються, залишаться в основному тими ж. Основна відмінність полягає в тому, що при $h < 0$ резонансна крива отримає нахил у бік низьких, а не високих частот.

в) *Аналіз системи з малою дисипацією.* При дослідженні системи з урахуванням порівняно невеликого лінійного дисипативного доданка діють наступним чином. Система описується рівнянням

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x + hx^3 = G\cos(\omega_1t + \theta) =$$

$$= G_c \cos \omega_1t + G_s \sin \omega_1t, \quad (7.10)$$

де ω_0^2 і h – ті ж параметри, що і в (7.4); 2α – коефіцієнт дисипації (демпфірування), а G_s і G_c – амплітуда відповідно синусної і косинусної складових збурюючої сили.

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$x = A \cos \omega_1t.$$

Простота запису розв'язку полегшує підстановку його в диференціальне рівняння, тоді як врахування синусної і косинусної складових збурюючої сили $G(t)$ дозволяє врахувати фазовий зсув між розв'язком і збурюючою силою. Після підстановки передбачуваного розв'язку в рівняння (6-10) і групування членів з $\cos \omega_1 t$ і $\sin \omega_1 t$ отримаємо систему двох алгебраїчних рівнянь (гармоніками потрібної частоти знову нехтуємо):

$$\begin{aligned} -\omega_1^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3}{4} h A^3 &= G_c; \\ -2\alpha \omega_1 A &= G_s. \end{aligned}$$

Квадрат амплітуди збурюючої сили $G^2 = G_c^2 + G_s^2$, а тому

$$\left[(\omega_0^2 - \omega_1^2) A + \frac{3}{4} h A^3 \right]^2 + [2\alpha \omega_1 A]^2 = G^2. \quad (7.11)$$

Це рівняння пов'язує амплітуду розв'язку з параметрами вихідного рівняння. При відсутності розсіювання енергії $\alpha = 0$ і воно, як і слід було очікувати, зводиться до (7.7). Рівняння (7.11) є повним рівнянням третього степеня відносно A^2 і тому не може бути так просто досліджене за допомогою графічної побудови, використаної при аналізі рівняння (7.7). Однак це рівняння дає можливість отримати ряд корисних відомостей.

Умовою стрибкоподібної зміни амплітуди розв'язку, як і раніше, є

$$\frac{dA}{d\omega_1} = \infty.$$

Після диференціювання і спрощень ця умова запишеться у вигляді

$$A \left\{ \left[(\omega_0^2 - \omega_1^2) + \frac{3}{4} h A^2 \right] \left[(\omega_0^2 - \omega_1^2) + \frac{9}{4} h A^2 \right] + (2\alpha \omega_1)^2 \right\} = 0. \quad (7.12)$$

Випадок $A = 0$ тривіальний, і отже, вираз, який стоїть у дужках, повинен дорівнювати нулю. Якщо $\alpha = 0$, ця вимога приводить до двох

знайдених раніше умов (7.8) і (7.9), які графічно зображені на рис. 7.7, а також на рис. 7.8. Коли ж в демпфированій системі $\alpha > 0$, рівняння (7.12) визначає одну єдину криву також зображену на рис. 7.8. Ця крива розташовується в області, замкненій між двома кривими, що відповідають $\alpha = 0$. Мінімальне значення ω_1 на цій новій кривій дещо більше, ніж ω_0 , і може бути знайдене шляхом диференціювання рівності (7.12) по A з урахуванням умови

$$\frac{d\omega_1^2}{dA} = 0.$$

Після диференціювання і спрощення ця умова приводить до залежності

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{9}{8}hA^2, \quad (7.13)$$

яка нагадує залежності (7.8) і (7.9). Після достатньо складних перетворень з (7.12) і (7.13) можна знайти значення A в точці стрибка амплітуди:

$$hA^2 = \frac{16}{3}\alpha^2 \left[1 + \left(1 + \frac{\omega_0^2}{3\alpha^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (7.14)$$

Якщо демпфірування настільки мале, що

$$\frac{\omega_0^2}{3\alpha^2} \ll 1,$$

то можна скористатися наближеним виразом

$$hA^2 = \frac{16\alpha\omega_0}{3(3)^{1/2}}. \quad (7.15)$$

З (7.15) і (7.13) з очевидністю витікає, що значення амплітуди перед стрибкоподібним її збільшенням і відповідне значення частоти ω_1

збільшуються в міру того, як демпфірування, яке визначається параметром α , збільшується.

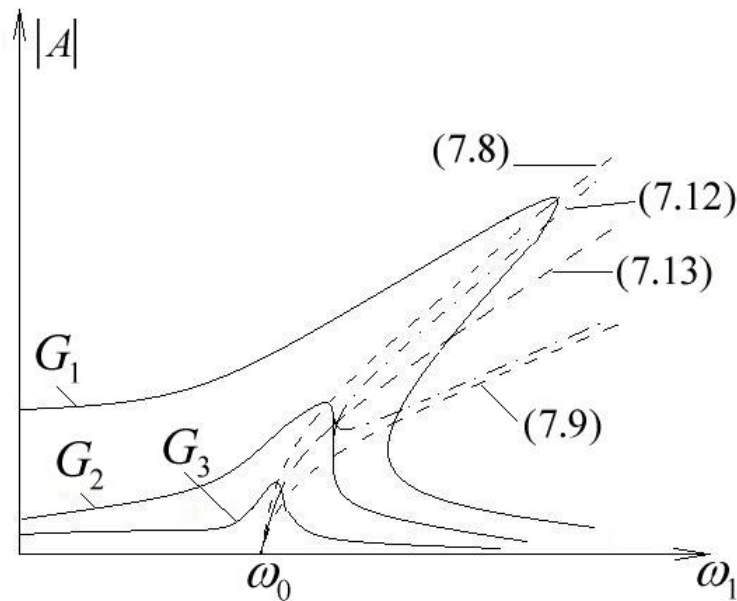


Рис. 7.8. Нелінійні резонансні криві до прикладу 17, побудовані з урахуванням невеликих втрат енергії для трьох значень амплітуди зовнішнього впливу. Показані також геометричні місця характерних точок резонансних кривих

Отримані результати зведені на рис. 7.8, що відповідає поведінці системи із порівняно малим демпфіруванням. На ньому побудовані графіки згідно (7.8), (7.9), (7.11), (7.12) і (7.13), причому розглядаються три значення амплітуди збурення G . Якщо G достатньо велика ($G = G_1$), реакція системи неоднозначна і можуть мати місце стрибки амплітуди розв'язку. При критичному значенні $G = G_2$ нахил резонансної кривої дорівнює нескінченності лише в одній точці і стрибок амплітуди неможливий. Якщо значення $G = G_3$ менше критичного, на кривій немає точки з нескінченним нахилом. Достатньо точне накреслення сімейства кривих подібне рис. 7.8, очевидно, пов'язане з солідним об'ємом обчислень при визначенні змінних, які характеризують систему.

г) *Збудження третьої гармоніки.* Вище при побудові розв'язку як з урахуванням демпфірування, так і без нього, була знайдена лише основна гармоніка періодичного розв'язку вихідного нелінійного диференціального рівняння. Дійсно, нами було виключено з розгляду доданок потроєної частоти, який виникає при підстановці передбачуваного розв'язку в диференціальне рівняння. Тому знайдений нами розв'язок вірний лише в першому наближенні.

Очевидний шлях уточнення розв'язку полягає в тому, що ми шукаємо його в формі

$$x = A_1 \cos \omega_1 t + A_3 \cos 3\omega_1 t, \quad (7.16)$$

яка містить як основну, так і третю гармонічні складові, замість форми (7.2), яка містить лише основну гармоніку. Визначенню підлягають коефіцієнти A_1 і A_3 . Якщо передбачуваний розв'язок (7.16) підставити в рівняння (7.4), яке описує недемпфировану систему, і згрупувати члени, що містять $\cos \omega_1 t$ і $\cos 3\omega_1 t$, то вийде наступна система алгебраїчних рівнянь для визначення A_1 і A_3 :

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega_1^2) A_1 + \frac{3}{4} h A_1^3 + \frac{3}{4} h A_1 A_3 (A_1 + 2A_3) &= G; \\ (\omega_0^2 - 9\omega_1^2) A_3 + \frac{3}{4} h A_3^3 + \frac{3}{4} h A_1^2 (A_1 + 6A_3) &= 0. \end{aligned}$$

Хоча теоретично ці рівняння можуть бути розв'язані відносно A_1 і A_3 , їх розв'язок не простий. Для будь-якого окремого випадку можливий числовий розв'язок, але отримати результат в загальному вигляді не є можливим.

Якщо припустити, що умови такі, що амплітуда третьої гармоніки A_3 була малою порівняно з A_1 , тобто

$$\frac{A_3}{A_1} \leq 1,$$

то другому з попередніх рівнянь можна надати вигляду

$$\frac{A_3}{A_1} = \left(-\frac{hA_1^2}{4} \right) / (\omega_0^2 - 9\omega_1^2), \quad (7.17)$$

А перше з них виявляється ідентичним рівнянню (7.7). Таким чином, A_1 можна, як і раніше, визначити з рівняння (7.7), а A_3 знайти потім з (7.17).

Якщо $\omega_1 > \omega_0/3$, то A_1 по знаку збігається з A_3 і фаза третьої гармоніки така, що вершини осцилограми коливань стають гострішими, як показано на рис. 7.9. Якщо умови такі, що A_1 відповідає верхній гілці графіка (рис. 7.7), зміна x по фазі в точності збігається зі зміною збурення. Якщо A_1 відповідає нижній гілці (рис. 7.7), то x протифазна збуренню. Якщо $\omega_1 < \omega_0/3$, то A_1 протилежне A_3 по знаку і вершини результуючої осцилограми стають більш плоскими.

Слід зауважити, що якщо рівняння Дуффінга описує коливання механічного осцилятора, то змінна x виражає відхилення. Найчастіше осцилограма коливань виявляється більш гостроконечною завдяки третій гармоніці. Якщо фізична система, що розглядається – електричне коло, яке складається з дроселя зі сталлю і конденсатора, то x виражає магнітний потік в осерді дроселя. Значно легше піддається вимірюванню напруга на дроселі, яка пропорційна швидкості зміни магнітного потоку. Якщо крива зміни магнітного потоку гостроконечна, то вершини відповідної осцилограми напруги будуть плоскішими.

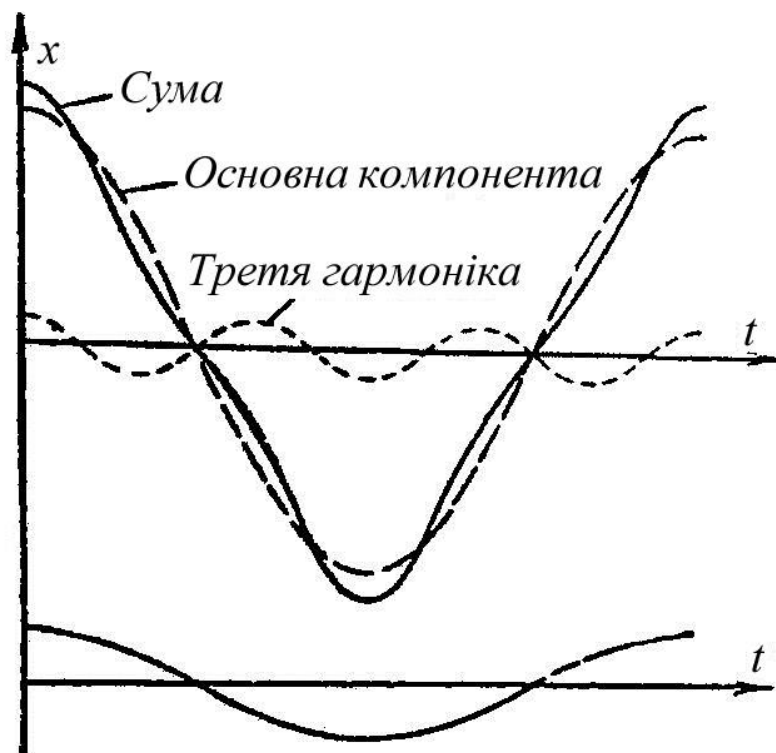


Рис. 7.9. Наближений розв'язок, який відповідає усталеному режиму кола, яке розглядається в прикладі 17, при $\omega_1 > \omega_0/3$. Наведені графіки першої та третьої гармонік, а також зовнішнього впливу

д) *Стрибкоподібні зміни амплітуди коливань при зміні амплітуди збурення.* Деяка видозміна явища стрибка спостерігається, якщо при незмінній частоті збурення змінювати його амплітуду так, що G змінюється, тоді як ω_1 залишається постійною. Поширюючи цей випадок дослідження, наведене в попередніх розділах, неважко показати, що, якщо відповідним чином обрати значення ω_1 , то зміна $|A|$ в залежності від G виражається графіком, який для випадку малого демпфірування наведений на рис. 6-10. І в цьому випадку існує область значень G , в якій можливі три значення $|A|$. Верхнє і нижнє з цих значень стійкі, тоді як середнє нестійке

і не може спостерігатися в умовах експерименту. Стрибокоподібні зміни $|A|$ мають місце, хоча G змінюється плавно і неперервно.

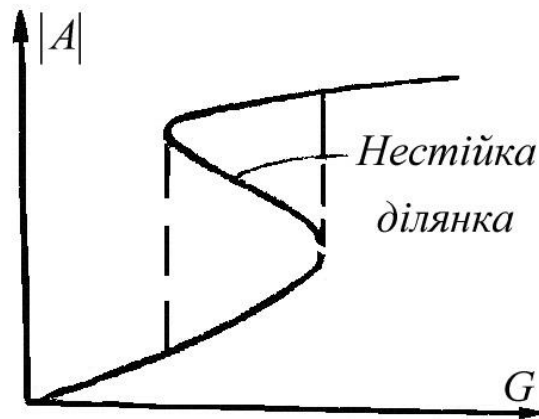


Рис. 7.10. Залежність амплітуди розв'язку від амплітуди зовнішнього впливу для прикладу 17. Частота зовнішнього впливу є постійною; врахований вплив малих втрат енергії. Пунктиром вказані стрибкоподібні зміни амплітуди коливань

В електричному колі зі сталлю по схемі на рис. 7.2 спостерігаються стрибкоподібні зміни, які ілюструються рис. 7.8 і 7.10. Оскільки це резонансне явище пов'язане з феромагнітним елементом, такі стрибкоподібні зміни іноді називають явищем ферорезонансу. Ту ж назву часто поширюють на аналогічні по суті явища, які спостерігаються в будь-якій фізичній системі, що описується рівнянням Дуффінга, навіть якщо ця система в натурі не має прямого відношення до електричних кіл зі сталлю.

В наведеному дослідженні розглядався лише усталений режим, який може мати місце даному електричному колі. В ряді робіт викладено теоретичне дослідження, яке дає уявлення також і про перехідні режими. Воно в основному базується на методах гармонічного балансу і варіації параметрів, а його результати зображуються графічно у вигляді так званої діаграми Хаясі. Така діаграма для системи з конкретним набором числових

параметрів наведена на рис. 7.11. Припускається, що розв'язок змінюється гармонічно з частотою зовнішнього збурення. Координатні вісі діаграми відповідають синусній і косинусній компонентам розв'язку. Вектор, проведений з початку координат в будь-яку точку площини, яка відповідає конкретному розв'язку, по своїй довжині пропорційний амплітуді цього розв'язку, а кут його повороту дорівнює фазовому зсуву розв'язку. Двом стійким періодичним режимам відповідають два стійких фокуса діаграми, хоча при інших числових значеннях параметрів їм можуть відповідати стійкі вузли. Нестійкому періодичному розв'язку відповідає сідло. Стійка точка з меншою амплітудою представляє собою розв'язок майже в точності протифазний збурюючій силі; розв'язок з більшою амплітудою відстає від збурюючої сили приблизно на 50° , оскільки припускається, що система демпфирована. Криві в околі особливих точок показують, яким чином змінюється амплітуда і фаза в процесі встановлення періодичних коливань. Дослідження за допомогою цього методу виявляється можливим лише в припущенні, що зміна амплітуди відбувається достатньо повільно в порівнянні зі зміною самої величини x , так щоб за час одного повного циклу коливань величини x амплітуда практично залишалась постійною.

На діаграму можуть бути нанесені сепаратиси, які розділяють область початкових значень, які приводять до одного стійкого періодичного режиму, від області початкових значень, які приводять до іншого. Експериментальна перевірка на електричному колі зі сталлю, яка дозволяє задавати різні початкові умови, показала, що дані експерименту достатньо близько збігаються з теоретичними результатами.

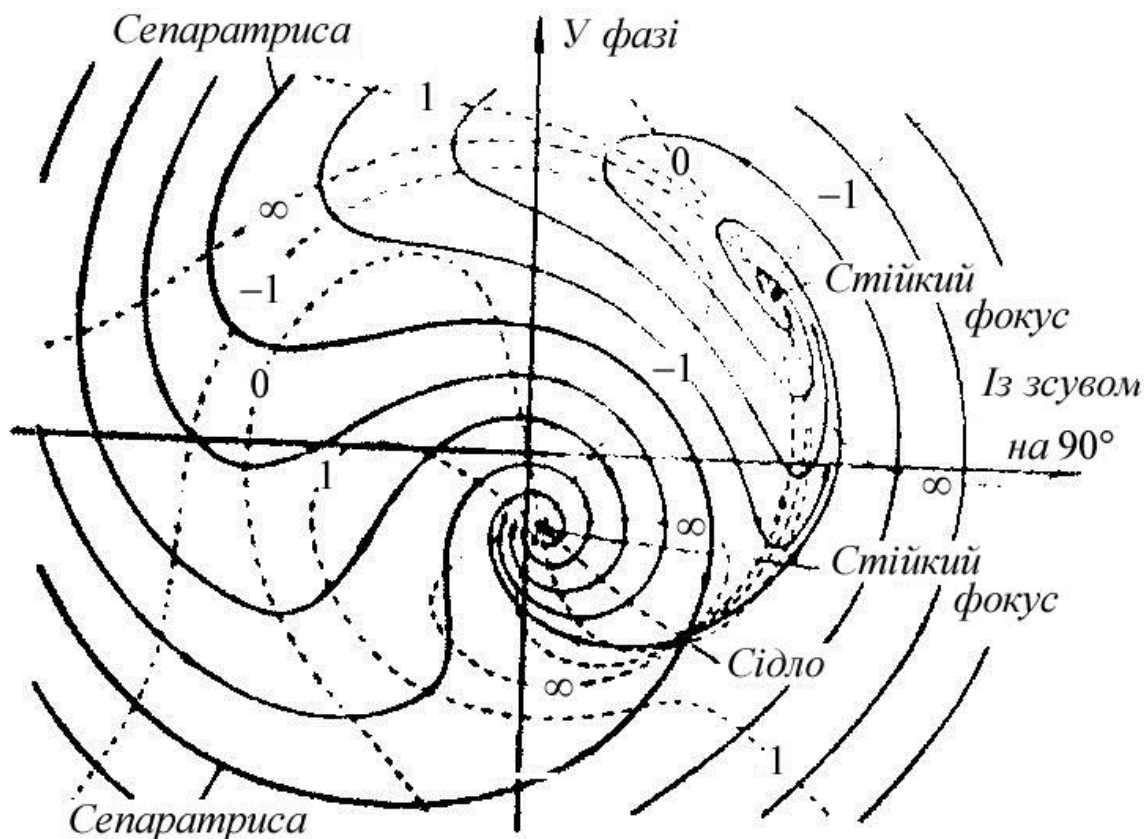


Рис. 7.11. Діаграма Хаясі, яка показує зміну синфазної і зсунутої на 90° компонент розв'язку для системи, яка нагадує розглянуту в прикладі 17, але побудована з урахуванням впливу втрат енергії. Суцільні лінії зображують процеси встановлення коливань; пунктиром нанесені ізокліни, нахил яких вказаний на графіку. Час росте у напрямку, позначеному стрілками. Очевидно, що існують два стійких режими з різною амплітудою коливань, окремі один від одного нестійким періодичним режимом з проміжним значенням амплітуди.

Приклад 18. Флуктуації температури в лампі розжарювання

Лампа розжарювання складається з тонкого вольфрамового дроту, підвішеного у вакуумі, по якому протікає електричний струм. Якщо лампа

підключена до джерела змінного струму, то температура нитки змінюється в невеликих межах. Рівняння, яке описує ці зміни, суттєво нелінійні.

Опір вольфраму приблизно пропорційний його абсолютній температурі θ . Тому залежність між миттєвими значеннями напруги на нитці розжарювання і струму в ній виражається рівністю

$$e = c\theta i,$$

де c – постійна, яка залежить від розмірів нитки і властивостей її матеріалу.

Миттєве значення енергії, яка подається до нитки, дорівнює добутку ei , а значення теплової енергії, що подається, пропорційне θi^2 , де напруга e замінена добутком θi . Довга розташована у вакуумі нитка витрачає більшу частину енергії, що подається, у вигляді теплового випромінювання, і тому значення втрат енергії пропорційне $\theta^4 - \theta_\alpha^4$, де θ_α – абсолютна температура навколишнього середовища. Нитка зазвичай нагрівається до такої температури, що можна в подальшому прийняти $\theta^4 \gg \theta_\alpha^4$. Різниця між значеннями енергії, яка подається і яка розсіюється, визначає швидкість зміни власної температури нитки. Ця різниця пропорційна похідній $d\theta / dt$. З огляду на це зміна температури описується рівнянням

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = a\theta i^2 - b\theta^4, \quad (7.18)$$

де a і b – постійні, які визначаються геометрією і матеріалом нитки.

Якщо по нитці протікає постійний струм I_s , то $\dot{\theta} = 0$ і θ приймає постійне значення

$$\theta_s = \left(\frac{aI_s^2}{b} \right)^{1/3}.$$

Коли нитка нагрівається змінним струмом, її температура визначається в першу чергу ефективним значенням цього струму I_r . Якщо частота живлення не надто мала, температура нитки змінюється лише в малих межах навколо середнього значення, яке розраховується так само, як θ_s , з підстановкою I_r на місце I_s . Коливання температури можна розрахувати за допомогою принципу гармонічного балансу.

Зручно записати вираз для миттєвого значення змінного струму у вигляді

$$i = 2^{1/2} I_r \sin \omega t, \quad (7.19)$$

де I_r – ефективне значення струму.

Кожен раз, коли струм спадає до нуля, температура нитки дещо зменшується; таким чином, вона змінюється з частотою, яка дорівнює подвоєній частоті живлення. Далі, нитка не може нагріватися і холонути миттєво, тому зміна її температури повинна дещо відставати від зміни струму. Доцільно припустити, що в усталеному режимі температура нитки змінюється згідно залежності

$$\theta = \theta_0 - \theta_1 \sin(2\omega t + \varphi). \quad (7.20)$$

Однак ця залежність справедлива лише при $\theta_1/\theta_0 \ll 1$. В іншому випадку зміна температури буде далеко не синусоїдальною і у виразі для θ потрібно буде враховувати додаткові гармоніки. Вибір знака мінус перед θ_1 на цьому етапі видається довільним, але далі ми переконаємося в його доцільності.

Підстановка (7.19) і (7.20) в рівняння (7.18) приводить до рівняння

$$2\omega\theta_1 \cos(2\omega t + \varphi) = a[\theta_0 + \theta_1 \sin(2\omega t + \varphi)]I_r^2(1 - \cos 2\omega t) - b\theta_0^4 - 4b\theta_0^3\theta_1 \sin(2\omega t + \varphi),$$

в якому члени з $\theta_0^2\theta_1^2$, $\theta_0\theta_1^3$ і θ_1^4 відкинуті як нехтовно малі в порівнянні з θ_0^4 і $\theta_0^3\theta_1$. Цей вираз можна перетворити за допомогою тригонометричних тотожностей, причому в результаті він містить декілька постійних доданків, декілька доданків, які містять $\sin 2\omega t$ і декілька доданків, які містять $\cos 2\omega t$. При цьому зручно ввести параметри $A = 2\omega / aI_r^2$ і $B = b\theta_0^3 / aI_r^2$. Так, як значення θ_0 повинно бути близьким до θ_s , величина B повинна бути близькою до одиниці.

Групування членів приводить до трьох рівнянь:

$$\begin{aligned}(B-1)\theta_0 &= \frac{\theta_1}{2} \sin \varphi; \\ A\theta_1 \cos \varphi + 3\theta_1 \sin \varphi &= \theta_0; \\ -A\theta_1 \sin \varphi + 3\theta_1 \cos \varphi &= 0.\end{aligned}$$

В останніх двох рівняннях заздалегідь використана умова $B=1$, оскільки в них вона служить достатньо хорошим наближенням. Очевидно, що ця умова не може бути використана в першому рівнянні, оскільки це привело б до вимоги $\theta_1 = 0$.

З третього рівняння безпосередньо слідує, що $\operatorname{tg} \varphi = 3/A$, і якщо це значення φ використовувати для розв'язку другого рівняння, то відношення θ_1 / θ_0 визначається як

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = (A^2 + 9)^{-1/2}.$$

Врешті-решт, з першого рівняння можна визначити уточнене значення B :

$$B = 1 + \frac{\theta_1}{2\theta_0} \sin \varphi = 1 + \frac{3/2}{A^2 + 9}.$$

Середнє значення температури $\theta_0 = (aI_r^2 B / b)^{1/3}$, чи наближено

$$\theta_0 = \left(\frac{aI_r^2}{b} \right)^{1/3} \left[1 + \frac{1}{2(A^2 + 9)} \right]$$

за умови, що $A^2 + 9 \gg 1$.

На рис. 7.12 представлена зміна кута φ , відношення θ_1 / θ_0 і параметра B в залежності від параметра A . При зменшенні A , обумовленому або збільшенням струму I_r , або зменшенням частоти ω , значення величин φ , θ_1 / θ_0 і B збільшуються.

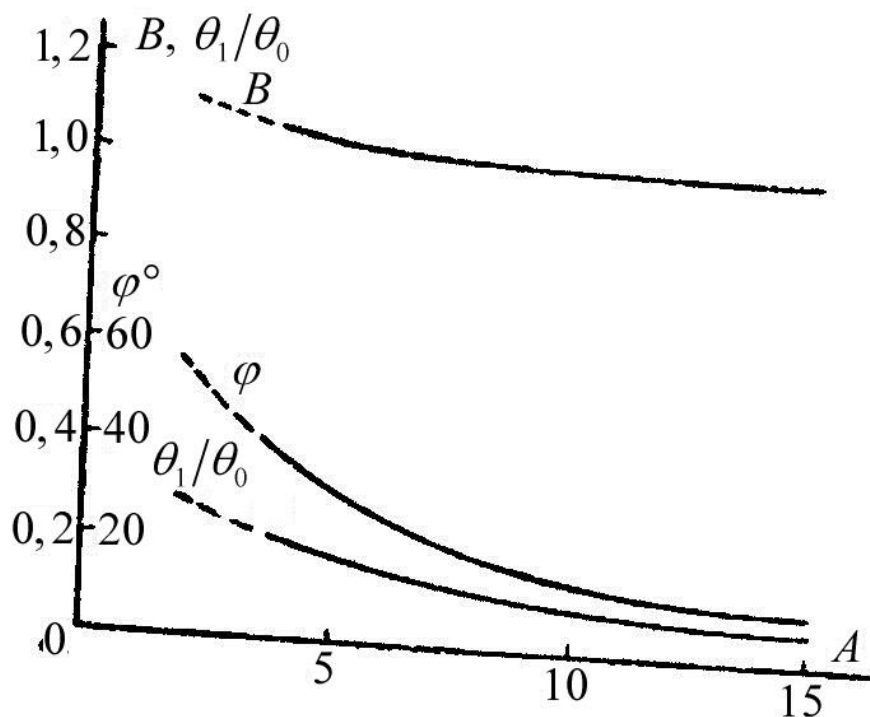


Рис. 7.12. Зміна параметрів розв'язку прикладу 18

Для 115-вольтої лампи розжарювання потужністю 6 Вт значення параметра a приблизно $9000 \text{ а}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$. З огляду на це при роботі на частоті 60 Гц параметр A приблизно дорівнює 30. Відношення θ_1 / θ_0 близьке до 1/30, кут φ менший, ніж 6° , а параметр B трохи менший, ніж 1,002.

7.3 Ітерації

Метод, близький до методу збурень, ґрунтується на ітераційному процесі. Він дає можливість уточнити розв'язок, якщо знайдено його перше наближення. Процес ітерацій можна побудувати по-різному, але в основному завжди спочатку розв'язують початкове рівняння в нехтуванні деякими доданками. Отриманий таким чином розв'язок використовують потім сумісно з раніше відкинутими доданками, і таким чином отримують друге наближення розв'язку. В багатьох випадках такий процес приводить до розв'язку необхідної точності.

Вимушений рух нелінійної системи другого порядку описується рівнянням

$$\ddot{x} + f(x) = G \cos \omega_1 t, \quad (7.21)$$

в якому $f(x)$ – нелінійна функція x .

Припустимо, що для цього рівняння визначено наближений розв'язок $x_0(t)$ і вимагається визначити точніший розв'язок. В цьому випадку можна провести ітерацію, розв'язавши рівняння (7.21) відносно \ddot{x} і підставивши $x_0(t)$ у вираз функції $f(x)$. В результаті отримаємо

$$\ddot{x} = -f(x) + G \cos \omega_1 t. \quad (7.22)$$

Оскільки x_0 визначено як наближений розв'язок рівняння (7.21), права частина (7.22) є не що інше, як \ddot{x}_0 плюс деякі поправочні члени. Інтегруючи праву частину двічі, отримаємо $x = x_0 + \text{інтеграл від поправки}$, і якщо поправочні члени відносно малі, то новий розв'язок точніший вихідного.

Приклад 19. Наближене обчислення третьої гармоніки розв'язку рівняння Дуффінга

Для рівняння Дуффінга

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + hx^3 = G \cos \omega_1 t \quad (7.23)$$

в прикладі 17 знайдений наближений розв'язок

$$x_0 = A_1 \cos \omega_1 t, \quad (7.24)$$

де коефіцієнт A_1 визначається відношенням

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2) A_1 + \frac{3}{4} h A_1^3 = G. \quad (7.25)$$

Ітераційний процес можна застосувати наступним чином. Розв'язавши рівняння (7.23) відносно \ddot{x} і підставивши в нього праву частину x_0 з виразу (7.24), отримаємо

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 A_1 \cos \omega_1 t - h A_1^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega_1 t + \frac{1}{4} \cos 3\omega_1 t \right) + G \cos \omega_1 t.$$

Внаслідок (7.25) це співвідношення приймає форму

$$\ddot{x} = -\omega_1^2 A_1 \cos \omega_1 t - \frac{h A_1^3}{4} \cos 3\omega_1 t. \quad (7.26)$$

Значення постійних інтегрування прийняте нульовим, оскільки шукається періодичний розв'язок з нульовим середнім значенням.

При розробці курсу лекцій використовувалась література:

1. Залевский, Г.М. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. / Г.М.Залевский, Р.З.Сагдеев. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 368 с. – Библиогр.:с.360 – 366. – Предм.укз.: с. 367 – 368. – ISBN 5-20-013882-3.
2. Андронов А.А. Теория колебаний. / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 568 с. – Библиогр.: с. 563–568.
3. Бутенин Н.В. Введение в теорию нелинейных колебаний.: учеб. пособие для втузов / Н.Б. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – Изд.второе,переработанное. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. – 384 с. – Библиогр.: с. 370 – 377. – Предм.указ.: с. 380 – 381. – Имен.указ.: с. 378–379.
4. Блэкьер, О. Анализ нелинейных систем / О. Блэкьер – М.: «Мир», 1969. – 400 с. – Библиогр.по главам. – Указ.имен.: с.386–387.– Предм.указ.: с. 388–395. – Перевод изд.: NONLINEAR SYSTEM ANALYSIS / Ausnin Blaquiere. New York and London, 1966.
5. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем / В.Каннингхэм – М.-Л.: Гос. энергоиздат. – 1962. – 458 с. – Библиогр.: с. 448–456. – Перевод изд.: INTRODUCTION to NONLINEAR ANALYSIS / W.J.Cunningham. McGraw- Hill Book Co. Inc. N.Y.,1958.
6. Хаяси, Т. Нелинейные колебания в физических системах. / Т. Хаяси; перевод с англ. – М.: «Мир», 1968. – 432 с. – Библиогр.: с. 421–427. – Указ. имен.: с. 428–429. – Перевод изд.: NONLINEAR Oscillation in Physical System / Chihiro Hayshi. McGraw- Hill Book Co., Inc. N.Y.,1964.
7. Скотт Э. Волны в активнх и нелинейных средах в приложении к электронике / Э. Скотт; перевод с англ. – М.: «Советское радио». 1974. – 368 с. – Библиогр.: с. 349–360. – Предм. указ.: с.361–365. –

Перевод изд.: ACTIVE and NONLINEAR WAVE PROPAGATION in
ELECTRONICS./ Alwin Scott. John Willy and Sons, N.Y.,London,1970.